



STAGE DE FIN D'ÉTUDE

# MODÉLISATION DE L'OVOGENÈSE DE POISSON

Louis Fostier

4 avril 2022 - 16 septembre 2022

Université de Rennes 1  
UFR de mathématiques  
Master 2 Calcul Scientifique et Modélisation

Encadrants : Frédérique CLÉMENT et Romain YVINEC  
Référent universitaire : Nicolas SEGUIN





# Remerciements

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes encadrants de stage, Frédérique CLÉMENT et Romain YVINEC, pour m'avoir guidé et corrigé dans le stage comme dans la rédaction du rapport. Je tiens aussi à remercier Nicolas SEGUIN pour son aide dans la préparation du stage, son suivi pendant le stage et ses corrections sur le rapport.

Plus largement, merci à tous les professeurs du Master CSM qui m'ont donné les moyens de réaliser ce travail.

Merci aussi à Sully HENG, Fabrice MAHÉ et Violette THERMES pour les discussions autour des données expérimentales.

Pour finir, je voudrais remercier les équipes M3DISIM et MUSCA pour leurs accueils, et en particulier les membres du bureau stagiaire Zineb, Jules et Gael.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Notions biologiques autour de l'ovogenèse</b>	<b>5</b>
2.1	Classification histologique des ovocytes	5
2.2	Dynamique de l'ovogenèse	7
2.3	Contrôle hormonal	8
<b>3</b>	<b>Données expérimentales du LPGP</b>	<b>10</b>
3.1	Protocole expérimental	10
3.2	Visualisation et régularisation	11
3.2.1	Méthode KDE	11
3.2.2	Visualisation des données	13
3.3	Analyse des données	14
3.3.1	Influence du temps sur la densité à l'échelle de la ponte	15
3.3.2	Creux de densité	17
<b>4</b>	<b>Modèle mathématique</b>	<b>20</b>
4.1	Rapide état de l'art sur les modèles mathématiques d'ovogenèse	20
4.2	Choix de modélisation	21
4.3	Modèle	21
4.4	Existence-Unicité d'une solution faible du problème non linéaire	23
4.4.1	Hypothèses	23
4.4.2	Définitions et notations	23
4.4.3	Préliminaires	24
4.4.4	Résultat principal et principe de la preuve	28
4.4.5	Preuve de l'existence-unicité	29
<b>5</b>	<b>Problème stationnaire</b>	<b>35</b>
5.1	Existence-unicité pour des cas particuliers	35
5.2	Schéma numérique pour le problème stationnaire	41
5.2.1	Description du schéma	41
5.2.2	Implémentation du schéma	43
5.2.3	Tests et validation du schéma	44
5.3	Problème inverse du problème stationnaire	47
5.3.1	Taux sans dépendance et pas de mortalité	47
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Preuves des propositions et théorèmes pour l'existence-unicité</b>	<b>50</b>
A.1	Preuve du lemme 4.4	50
A.2	Preuve de la proposition 4.7	51
A.3	Preuve de la proposition 4.9	53
A.4	Preuve de la proposition 4.11	57
A.5	Preuve du théorème 4.2 d'existence locale	59
A.6	Preuve de la proposition 4.12	65
A.7	Preuve du théorème 4.3 d'unicité locale	67
A.8	Preuve du théorème 4.1 d'existence-unicité d'une solution globale	71

# 1 Introduction

Ce stage de Master 2, réalisé dans les locaux de l'Inria-Saclay Île-de-France et ponctué de missions au centre INRAE Val de Loire, est encadré scientifiquement par Frédérique Clément, directrice de recherche à l'Inria, ainsi que par Romain Yvinec, chargé de recherche à l'INRAE. Nicolas Seguin, professeur des universités à l'université de Rennes 1, est le référent universitaire.

L'Inria est l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique. Il comporte plus de 200 équipes-projets, pour la plupart communes avec des partenaires, et 10 grands centres de recherche. L'INRAE est l'institut national de recherche pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement. Il comporte plus de 10 000 agents répartis en 18 centres de recherche.

Le stage entre dans le cadre d'une collaboration entre l'équipe-projet MUSCA (Dynamiques de populations multi-échelles pour des systèmes physiologiques) commune Inria, INRAE, CNRS, et le LPGP (Laboratoire de Physiologie et Génétique des Poissons) du centre INRAE de Rennes, autour du projet ANR DynaMO coordonné par Violette Thermes, chargée de recherche au LPGP. Ce projet a pour but d'associer l'analyse descriptive, l'analyse fonctionnelle et la modélisation pour comprendre la dynamique et la régulation de l'ovogenèse et de la fécondité chez le médaka.

Ce stage a aussi un intérêt dans le cadre du projet GinFiz (Gonadal aromatase inhibition and other toxicity pathways leading to Fecundity Inhibition in Zebrafish : from initiating events to population impacts) financé par l'ANSES, et qui vise à développer et tester de nouvelles méthodes pour caractériser les effets non-intentionnels des produits phytopharmaceutiques sur les populations de poissons (zebrafish notamment), en particulier les impacts résultant d'atteintes du système endocrinien des individus.

Les poissons modèles (e.g. zebrafish, médaka) sont très utilisés pour étudier les conséquences sur la fonction de reproduction de perturbations environnementales, telles que le changement climatique ou l'exposition à des polluants, que ce soit à l'échelle de l'individu ou de la population (éco-physiologie et/ou éco-toxicologie). Le processus de maturation des gamètes femelles (ovocytes) est en effet particulièrement sensible aux facteurs environnementaux internes (e.g. statut métabolique) ou externes (température, salinité, perturbateurs endocriniens). Par ailleurs, ce processus est un paramètre central pour les performances de reproduction (reproductive fitness). Cependant, les indicateurs utilisés sont assez rudimentaires, et ne tiennent souvent compte que du résultat final du processus de gamétogenèse, comme les performances de ponte.

L'objectif est donc de développer un modèle de l'ovogenèse de poisson prenant en compte les étapes-clés de contrôle physiologique et environnemental, et permettant de représenter toute la dynamique ovocytaire depuis les phases les plus précoces, et non uniquement la taille et la fréquence des pontes.

Dans ce cadre, le stage est dédié à la formulation et à l'étude d'un modèle au formalisme EDP (Équations aux Dérivées Partielles) de dynamique des populations ovocytaires chez les poissons modèles (médaka ou zebrafish). On s'appuiera sur les connaissances biologiques relatives aux mécanismes de l'ovogenèse chez les poissons, et sur les données expérimentales obtenues dans le cadre du projet ANR DynaMO.

## 2 Notions biologiques autour de l'ovogenèse

Dans cette section, nous allons présenter succinctement les mécanismes et dynamiques de l'ovogenèse chez les poissons.

Commençons avec quelques définitions : chez les animaux, l'ovogenèse est le processus biologique qui aboutit à la formation d'une cellule reproductrice femelle mature, l'ovule (i.e. l'oeuf chez le poisson). La cellule reproductrice en cours de maturation se nomme ovocyte. Après une phase extra-folliculaire, au sein de nid germinatif ("cradle"), l'ovocyte (cellule germinale) se développe dans une structure plus ou moins importante que l'on appelle follicule. Tout ce processus de maturation se déroule dans l'ovaire, organe reproducteur femelle.

Notons que l'on pourra consulter [21] pour une description assez complète de l'ovogenèse chez les poissons (téléostéens).

### 2.1 Classification histologique des ovocytes

La façon assez classique de décrire l'ovogenèse chez les poissons est de se baser sur une classification histologique des ovocytes et de décrire ensuite les processus de maturation qui ont lieu lorsque les ovocytes passent d'une classe à une autre (voir figure 1). Notons que cette classification se construit souvent autour de la vitellogénèse, phénomène d'incorporation par l'ovocyte de protéines de vitellogénine produitent par le foie ainsi que d'autres molécules telles que des lipides et des vitamines (voir [21] pour plus de détails).

Certains poissons dits "modèles", tels que le zebrafish ou le médaka, sont utilisés pour étudier

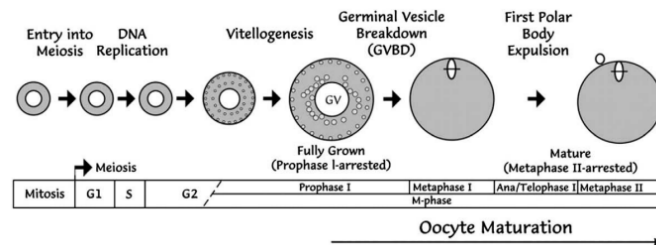


FIGURE 1 : Description schématique des étapes de croissance de l'ovocyte chez les poissons téléostéens, et étapes de division cellulaire correspondantes. Schéma issu de [21]

les mécanismes de l'ovogenèse. Ces espèces de poissons sont choisies car elles sont faciles à élever en laboratoire, et leurs pontes sont fréquentes et contrôlables. La description des ovocytes de ces espèces en différentes "classes", basée sur des critères histologiques, est donc bien documentée depuis longtemps (on peut citer Iwamatsu en 1988 pour le médaka [15] et Selman en 1993 pour le zebrafish [27]).

Nous allons décrire très rapidement les différentes classes d'ovocytes chez le médaka en reprenant l'article [15]. Cet article divise l'ovogenèse du médaka en 5 grandes étapes distinctes (Pré-vitellogénèse précoce, Pré-vitellogénèse tardive, Vitellogénèse précoce, Vitellogénèse tardive et Postvitellogénèse), que l'on peut raffiner en 10 étapes de croissance (voir figure 2 et 3). Les ovocytes sont recrutés lors de la première étape et mesurent alors près de 20 microns. À la fin de l'ovogenèse (juste avant la ponte), ils mesurent près de 1200 microns (voir figure 3).

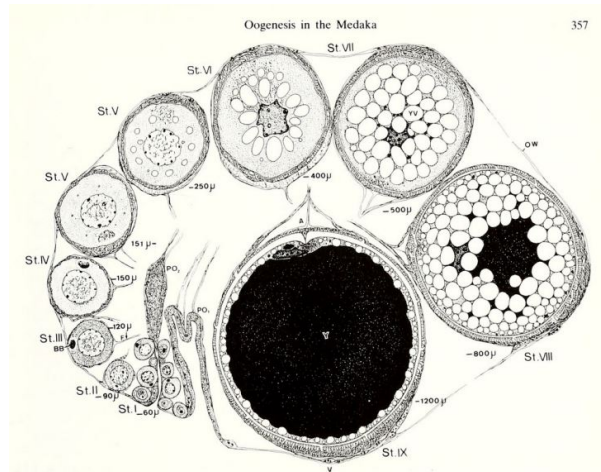


FIGURE 2 : Illustration des ovocytes en croissance à différents stades de l'ovogenèse chez le médaka, figure issue de [15]

Phase	Stage	Follicle size (μm)	General appearance	Nucleus	
Previtellogenic	Early	I	20 to 60	Centrally located and roughly spherical. Nucleoli and chromatin-threads with network appearance	
		II	61 to 90	Transparent cytoplasm and nucleus with round nucleoli clearly visible	Centrally located with peripheral nucleoli and thin lamp-brush chromosomes
	Late	III	91 to 120		Centrally located. Folded envelope. Voluminous nucleoli irregular in shape. Developed lamp-brush chromosomes
		IV	121 to 150	Transparent cytoplasm and nucleus with irregular shaped nucleoli clearly visible. Rudiments (bright spots) of short villi on chorion	Centrally located. Folded envelope. Voluminous nucleoli ring-shaped. Developed lamp-brush chromosomes
Vitellogenic	Early	V	151 to 250	Transparent cytoplasm and nucleus with ring-shaped nucleoli. Elongated short villi and attaching filaments on chorion	Folded envelope. Nucleoplasm strongly stainable with haematoxylin. Lamp-brush chromosomes thicker and shorter. Ring-shaped nucleoli
		VI	251 to 400	Transparent cytoplasm. Attaching filaments opaque in vegetal hemisphere	
	Late	VII	401 to 500	Attaching filaments opaque in vegetal hemisphere. Dark lipid granules in perinuclear region of cytoplasm filled with vacuoles (yolk vesicles) and oil droplets	Very irregular in shape. Displaced toward animal pole. Shortened chromosomes. Reduced in volume. Nucleoplasm strongly stainable with haematoxylin.
		VIII	501 to 800	Cortical alveoli (yolk vesicles) and oil droplets dimly visible in translucent cytoplasm surrounding yolk sphere	Located at animal pole. Condensed chromosomes massed in center of nucleoplasm
Post-vitellogenic	Maturation	IX	801 to 1200	Cortical alveoli and oil droplets clearly seen in light cortical cytoplasm. A large germinal vesicle visible near micropyle until resumption of meiosis	Apparent large vacuole within outer nuclear envelope at ovarian surface side. Nucleoli and nuclear envelope disappear with resumption of meiosis
		X	1200*	Projecting short villi and attaching filaments on chorion. Transparent and light cytoplasm clearly showing cortical alveoli and oil droplets	Second metaphase figure at animal pole in cortical cytoplasm

FIGURE 3 : Description des différents stades de l'ovogenèse chez le médaka, figure issue de [15]

Ces classifications sont purement descriptives, elles ne contiennent ni informations fonctionnelles, ni informations dynamiques (comme le temps de transit entre stades). Dans la section suivante, nous allons donc essayer de présenter quelques principes concernant la dynamique de l'ovogenèse chez les poissons, et en particulier chez le médaka et le zebrafish.

## 2.2 Dynamique de l'ovogenèse

Chez les poissons, trois principaux modèles de développement ovocytaire ont été identifiés [24]. Les ovaires synchrones, groupe-synchrones et asynchrones. Ces différences s'expliquent par des dynamiques de recrutement et de croissance complètement distinctes.

Dans le premier groupe se trouvent les poissons à ponte unique chez qui l'ovaire ne contient que deux stades ovocytaires avant la ponte : des ovocytes très peu matures et des ovocytes proches de la maturité (voir figure 4).

Le second groupe est caractérisé par la présence de trois modes dans l'histogramme de répartition des tailles ovocytaires : une classe d'ovocytes de faible maturité, une classe d'ovocytes de maturité plus avancée mais qui ne participent pas à la ponte de l'année et enfin une classe d'ovocytes en fin de maturation et qui seront pondus prochainement (voir figure 4). Ce groupe est intermédiaire entre les deux autres.

Le troisième groupe comprend les poissons à pontes multiples et se caractérise par la présence simultanée de tous les stades ovocytaires sans prédominance d'une classe particulière, excepté la classe des ovocytes de réserve constituée par les ovocytes protoplasmiques (stade I) qui peuvent être très abondamment représentés (voir figure 5). Les poissons modèles tels que le médaka et le zebrafish appartiennent à ce groupe. Notons que les mammifères aussi sont à ovogenèse asynchrone.

On ne dispose pas de beaucoup d'informations sur les dynamiques de l'ovogenèse (à l'échelle de

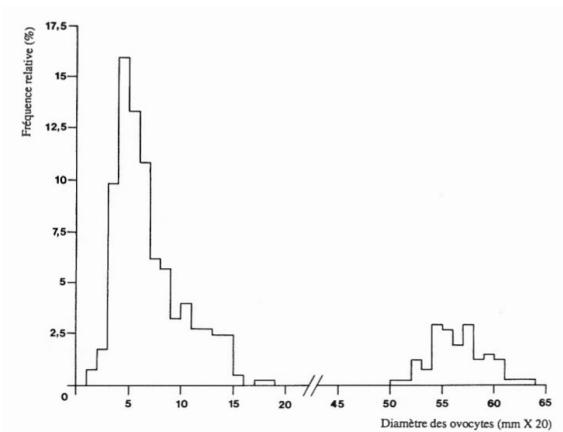


Fig. 2. — Structure ovarienne de l'ombre commun *Thymallus thymallus* avant la ponte.

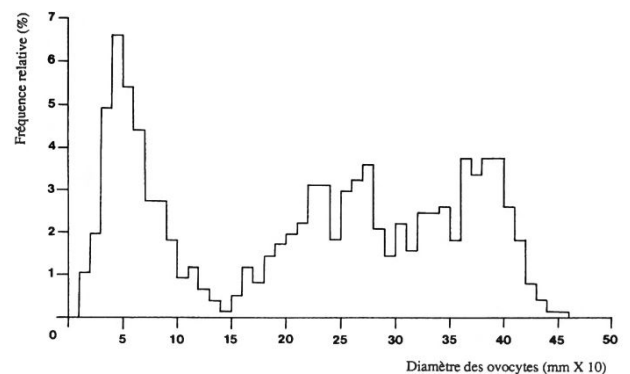


Fig. 3. — Structure ovarienne du barbeau fluviatile *Barbus barbus* avant la ponte.

FIGURE 4 : À gauche, structure ovarienne d'un poisson à ovogenèse synchrone avant ponte. À droite, structure ovarienne d'un poisson à ovogenèse groupe-synchrone avant ponte. Figures issues de [24]

la vie d'un individu ou même à l'échelle d'une ponte). C'est en cela que les données du LPGP vont être intéressantes.



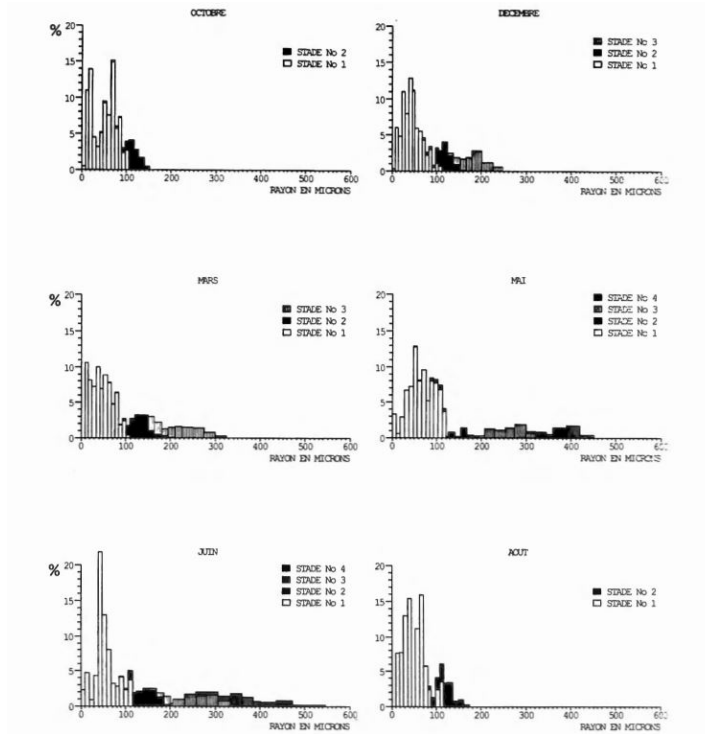


Fig. 4. — Structure ovarienne du goujon *Gobio gobio* à différents moments de son cycle gamétogénétique.

FIGURE 5 : Structure ovarienne d'un poisson à ovogenèse asynchrone à différents mois de l'année, figure issue de [24].

## 2.3 Contrôle hormonal

### *Lexique et abréviations :*

*Hormone* : Molécule messagère produite par des cellules endocrines, circulant dans le sang (souvent) et agissant à distance sur des cellules cibles

*Gonadotropines hypophysaires* : Hormones sécrétées par l'hypophyse et agissant sur les gonades

*FSH* : Hormone folliculo-stimulante

*LH* : Hormone lutéinisante

*FSHR/LHR* : récepteurs aux hormones FSH/LH

*AMH* : Hormone anti-müllérienne, sécrétée par les cellules somatiques folliculaires

*Œstrogènes* : Groupe d'hormones sexuelles stéroïdes (comprenant en particulier l'œstradiol)

*Aromatase* : Enzyme responsable de la biosynthèse des œstrogènes

Tout le processus de l'ovogenèse, du recrutement des ovogonies à la ponte, est sous contrôle hormonal, et les perturbations externes (présences de perturbateurs endocriniens notamment) peuvent grandement influencer ce processus. Nous allons présenter ici succinctement les principales régulations s'exerçant sur les différents stades de l'ovogenèse de médaka.

### 1. Phase pré-folliculaire

L'œstradiol, contrôlé par le FSHR, a un effet permissif sur la progression dans la lignée germinale (cellules PGC, GSC du germinal cradle sur la figure 6). En effet, les conditions de non-expression de l'aromatase (inactivation de FSHR [22], invalidation de l'aromatase [23] ou inhibiteurs de l'aromatase) bloquent non seulement la folliculogénèse au stade immature (prévitellogénèse), mais elles affectent aussi la lignée germinale [31].

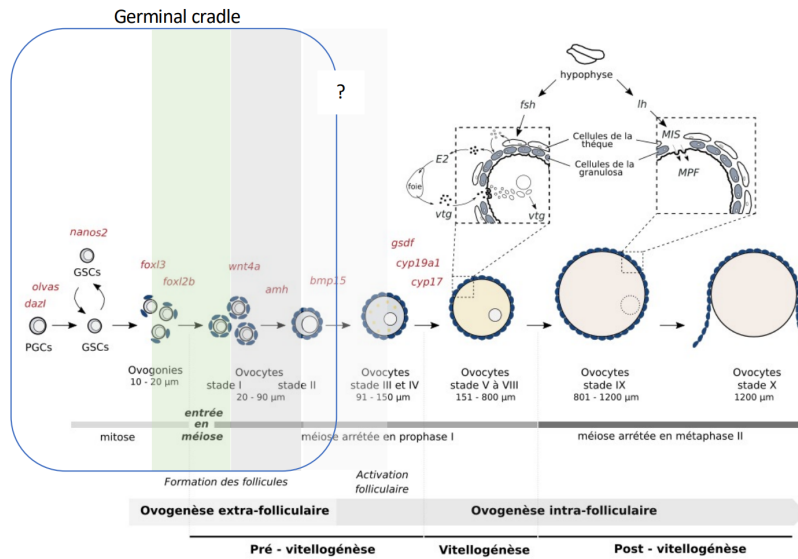


FIGURE 6 : Schéma de Violette Thernes sur les différentes étapes de l'ovogenèse chez le médaka. Les numéros des stades de maturité sont issus de la classification de Iwamatsu.

## 2. Recrutement

La sortie du cradle (correspondant approximativement au passage du stade II au stade III sur la figure 6) est régulée (dans le sens d'un ralentissement) par l'AMH (voir [32] pour invalidation AMH chez le zebrafish). Toujours par analogie avec le zebrafish (voir [25]), on peut aussi supposer que les follicules producteurs d'AMH sont principalement au stade prévitellogénique (stades III et IV sur la figure 6).

## 3. Phase de vitellogénèse

L'entrée en vitellogénèse (transition stade IV-V sur la figure 6) est sous le contrôle de la signalisation FSHR (elle n'est donc pas observée avant la puberté, et est bloquée en cas d'invalidation de ce récepteur ou de double invalidation FSH et LH, [31, 33]). La signalisation via FSHR stimule l'expression de l'aromatase, et donc la production d'œstradiol, qui à son tour stimule la production de vitellogénine par le foie. Les follicules les plus œstrogéniques sont aux stades VI-VII (stades vitellogéniques).

## 4. La maturation finale (stades IX-X sur la figure 6) est induite par le shift de stéroïdogénèse entre la production d'œstradiol, et celle d'un progestagène ( $17\alpha,20\beta$ -DHP), sous le contrôle de LH [17, 28, 34].

Ces régulations sont donc médiées, soit directement (cas de l'action de l'AMH), soit indirectement (cas de l'action de l'œstradiol) par les follicules eux-mêmes. D'un point de vue de dynamique des populations, nous pourrions donc les prendre en compte en introduisant des interactions entre les follicules.

### 3 Données expérimentales du LPGP

Dans cette section, on présentera les données dont on dispose et qui sont issues des expérimentations du LPGP dans le cadre de l'ANR DynaMO. Ces données vont nous permettre de récolter des informations sur la dynamique de l'ovogenèse à l'échelle d'un cycle de ponte chez le médaka, et dans un second temps elles seront un moyen de valider notre modèle.

#### 3.1 Protocole expérimental

L'expérience a pour but d'étudier la distribution en taille des ovocytes dans les ovaires de femelles médaka à différents instants de leur cycle de ponte.

Les prélèvements d'ovaires sont effectués sur des femelles ayant démarré leur cycle reproducteur (d'âge adulte), à 6 points de temps précis  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  comme indiqué sur la figure 7. Notons que chaque prélèvement est invasif, donc on a un unique prélèvement par individu. Le caractère journalier et la régularité de l'heure de la ponte est obtenue grâce à un conditionnement particulier des médakas (expositions à la lumière et alimentation bien choisies). Ceci donne lieu à une ponte journalière quasi systématique de 15 à 30 œufs à 9h chaque matin. Pour pouvoir être exploités, les ovaires prélevés sont transparisés et marqués au Vert de méthyle.

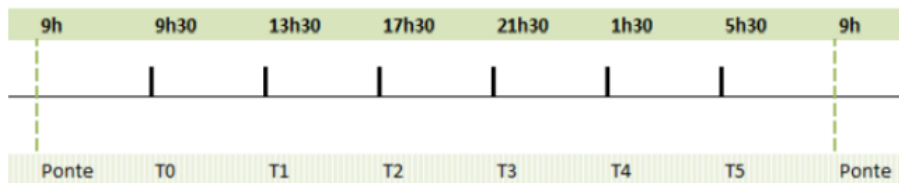


FIGURE 7 : Schéma issu de [13] représentant les points de temps de prélèvements

Ils sont ensuite analysés au microscope photonique. Enfin, après dé-bruitage des images, on pratique une segmentation à partir de la méthode de deep learning Cellpose couplée à un logiciel d'analyse d'image pour identifier les ovocytes et mesurer leur diamètre (voir figure 8). Toute cette procédure d'analyse d'image est détaillée dans [18].

Finalement, on dispose d'un total de 31 échantillons (ovaires), dont 6 à chaque temps  $T_0$ ,  $T_1$ ,

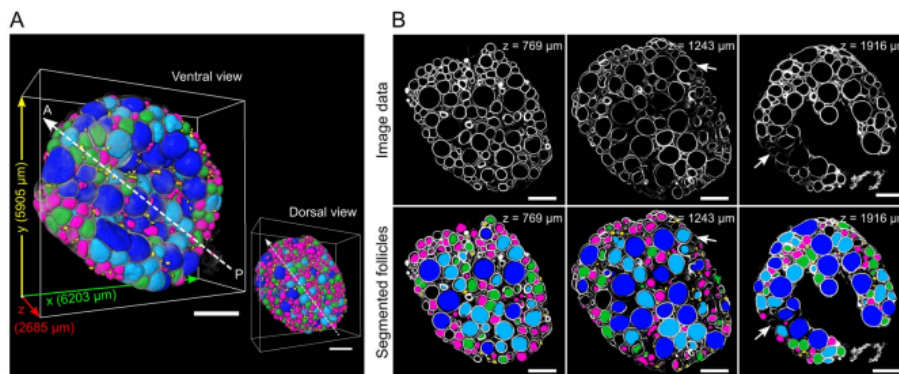


FIGURE 8 : Figure issue de [18]. Panel de gauche (A) : vues ventrale et dorsale d'une reconstruction 3D d'un ovaire entier avec des follicules segmentés (couleurs relatives à la classe de taille). Panel de droite (B), coupe d'un ovaire dans le plan XY à différentes profondeurs Z, avant segmentation (en haut) et après (en bas).

$T2$ , 5 à chaque temps  $T3$  et 4 à chaque temps  $T4$  et  $T5$ . Pour chaque échantillon, les ovocytes de taille (i.e. de diamètre) supérieure à  $44.8 \mu m$  sont tous identifiés et on peut supposer que leur taille est connue assez précisément.

## 3.2 Visualisation et régularisation

Pour chaque échantillon, on a plus de 1000 ovocytes dont les tailles sont à peu près comprises entre 40 et  $1400 \mu m$  (notons que la borne inférieure est imposée par les techniques d'analyse d'images alors que la borne supérieure est naturelle). De plus, la croissance en taille des ovocytes est un phénomène continu. Il paraît donc naturel de considérer les distributions des tailles des ovocytes sous forme continue.

On cherche dans un premier à quantifier la distribution en taille des ovocytes, par des approches de statistiques descriptive.

En d'autres termes, si on considère  $X$  la variable aléatoire "diamètre des ovocytes (en  $\mu m$ )" à valeurs dans  $[44.8, 1400]$  et  $\rho$  sa densité, on cherche une estimation  $\hat{\rho}$  de cette densité qui soit suffisamment régulière en tant que fonction du diamètre (i.e., continue, dérivable...). La méthode d'estimation de densité non paramétrique la plus connue est l'histogramme, mais elle donne une estimation constante par morceaux et donc non continue. Pour avoir ce caractère régulier, on va donc utiliser une méthode d'estimation à noyau (KDE pour kernel density estimate).

### 3.2.1 Méthode KDE

Pour rentrer beaucoup plus dans les détails, on pourra voir par exemple [8].

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeur réelle de densité  $f$  et soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  un échantillon de la variable aléatoire  $X$ .

**Definition 3.1.** Une fonction  $K$  est dite noyau si elle est une densité de probabilité (positive et de masse totale égale à 1) symétrique, de moyenne nulle, de variance finie et de carré intégrable.

Les noyaux couramment utilisés sont les noyaux Gaussien  $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ , d'Epanechnikov  $K(u) = \frac{3}{4}(1-u^2) \mathbb{1}_{|u| \leq 1}$  (continue dérivable mais pas  $C^1$ ) ou encore uniforme  $K(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{|u| \leq 1}$  (pas continue, noyau utilisé lorsque l'on fait un histogramme).

**Definition 3.2.** Soit  $h > 0$  la fenêtre de lissage (ou bandwidth) et  $K$  la fonction noyau. L'estimateur à noyau de  $f$  est défini ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

D'après la définition 3.2, on peut interpréter l'estimation par noyau en un point donné  $x$  comme la moyenne des valeurs des fonctions noyaux centrées sur chaque observation  $X_i$  de l'échantillon. On a principalement deux choix à faire pour bien estimer notre densité  $f$ , le choix du noyau  $K$  et le choix du paramètre de lissage  $h$ .

On peut déjà remarquer dans l'expression de  $\hat{f}(x)$  que du choix du noyau va dépendre la régularité de notre estimateur  $\hat{f}$ . Sa régularité sera du même ordre que celle du noyau choisi.

De plus, le paramètre de lissage a une influence assez évidente. Lorsqu'il tend vers 0, la fonction noyau s'apparente à la fonction Dirac et l'estimateur  $\hat{f}$  risque d'avoir des variations artificielles : on parle de sur lissage. D'autre part, plus  $h$  devient grand, plus on risque d'"effacer" les variations de  $f$  : on parle de sous lissage.

Notons qu'il existe de nombreuses théories et résultats qui ont pour but l'obtention d'un  $h$

optimal afin d'obtenir une estimation  $\hat{f}$  la plus proche possible de la réelle densité  $f$ . Un choix de  $h$  assez classique et facile à mettre en œuvre est celui de Silverman [30] pour lequel on a  $h = 0.9 \min\left(\hat{\sigma}, \frac{IQR}{1.34}\right) n^{-\frac{1}{5}}$  où  $\hat{\sigma}$  est l'écart type des échantillons et  $IQR$  est l'écart interquartile.

**Exemple de KDE :**

Afin d'illustrer les propos précédents, en particulier sur le choix du noyau et du lissage, on a tracé (voir figure 9) trois estimateurs de densité avec des choix différents de noyau et de bandwidth pour les mêmes observations, à savoir les diamètres des ovocytes relevés dans un ovaire au temps  $T5$  (choix fait arbitrairement).

Notons que dans les trois estimations, on observe aux alentours de  $40 - 50 \mu m$  une diminution

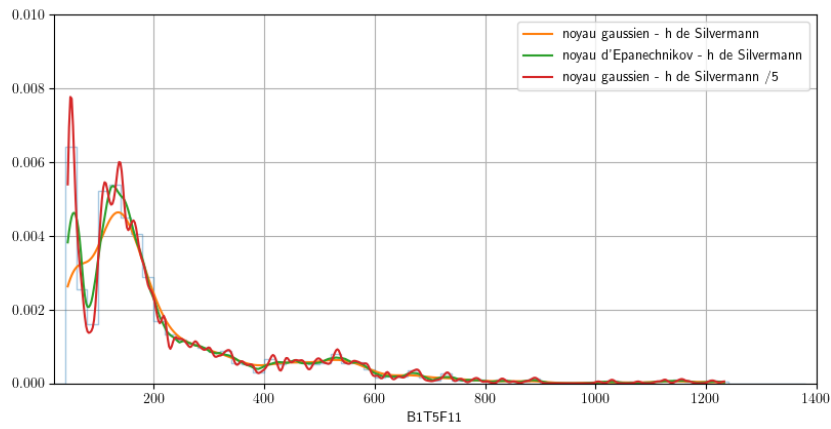


FIGURE 9 : Trois KDE différentes sur le même échantillon d'ovocytes (BIT5F11), en orange avec noyau gaussien et  $h$  de Silverman, en rouge avec noyau gaussien et  $h$  de Silverman divisé par 5, et en vert avec noyau d'Epanechnikov et  $h$  de Silverman. En bleu clair en fond, histogramme avec largeur de bande de  $25\mu m$ .

brusque de la densité. C'est un effet de bord lié au fait que la densité n'est pas à support strictement inclus dans  $[44.8, 1400]$ . En effet, comme déjà énoncé précédemment, la borne de gauche est artificielle et correspond seulement à la taille minimale des ovocytes que l'on peut mesurer.

Pour éviter cet effet de bord, on utilise la méthode de Schuster de "l'image miroir" (voir [26]) : on utilise maintenant le fait que notre variable  $X$  est supérieure à  $c = 44.8$ . La définition de notre estimateur à noyau de  $f$  devient :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) + K\left(\frac{x - 2c + X_i}{h}\right)$$

On voit bien sur la figure 10 que l'effet de bord a disparu.

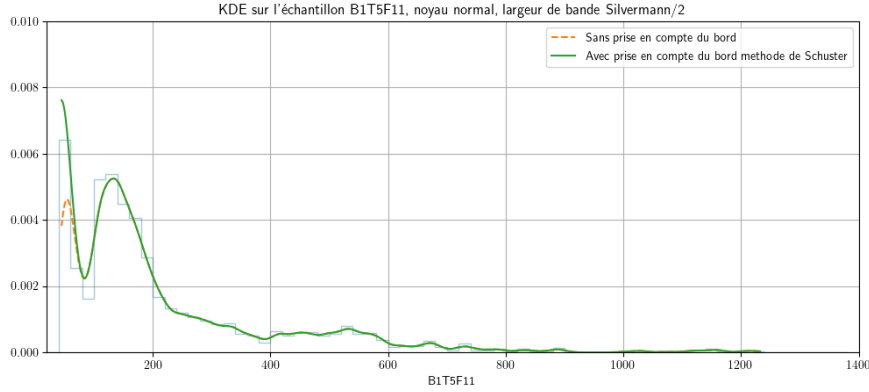


FIGURE 10 : KDE sur l'échantillon B1T5F11, avec noyau normal et bandwidth de Silverman divisée par 2. En pointillés oranges la KDE sans prise en compte du bord, et en vert en prenant en compte le bord avec la méthode de Schuster. En bleu clair en fond, histogramme avec largeur de bande de  $25\mu m$ .

### 3.2.2 Visualisation des données

La figure 11 présente les estimations (KDE) de densité d'ovocytes  $\hat{\rho}$  pour tous les ovaires observés à tous les points de temps. Notons que les densités ne sont pas normalisées contrairement à ce que l'on voit dans les figures précédentes, i.e.  $\int_c^\infty \hat{\rho} = n$  où  $n$  est le nombre d'ovocytes comptés dans l'ovaire.

#### Observations :

- Sur tous les échantillons sauf deux (BT3F8 en vert au temps  $T_3$  et BT4F4 en bleu au temps  $T_4$  sur la figure 11), on observe qualitativement les mêmes variations de densité pour les ovocytes de petite taille (jusqu'à  $\approx 300\mu m$ ). Quantitativement, l'intensité des variations, pics et creux est assez variable entre les échantillons, et le nombre total d'ovocytes (aire sous la courbe) est variable aussi.
- Concernant la densité des ovocytes de taille "moyenne" (environ de  $300\mu m$  à  $800\mu m$ ), on observe globalement une diminution de la densité lorsque la taille des ovocytes augmente, avec de nombreuses petites oscillations, qui sont très variables entre les individus et très dépendantes du choix de la fenêtre de lissage  $h$ .
- Concernant la densité des ovocytes de taille élevée (supérieure à environ  $800\mu m$ ), elle est faible (voir inexistante) pour les échantillons issus des premiers temps d'observations post-ponte, et plus on se rapproche de la ponte, plus la "queue" de la distribution semble se déplacer vers la droite. Cette partie de la distribution semble clairement dépendante du temps d'observation, en plus d'être assez variable entre les différents échantillons issus du même point de temps.

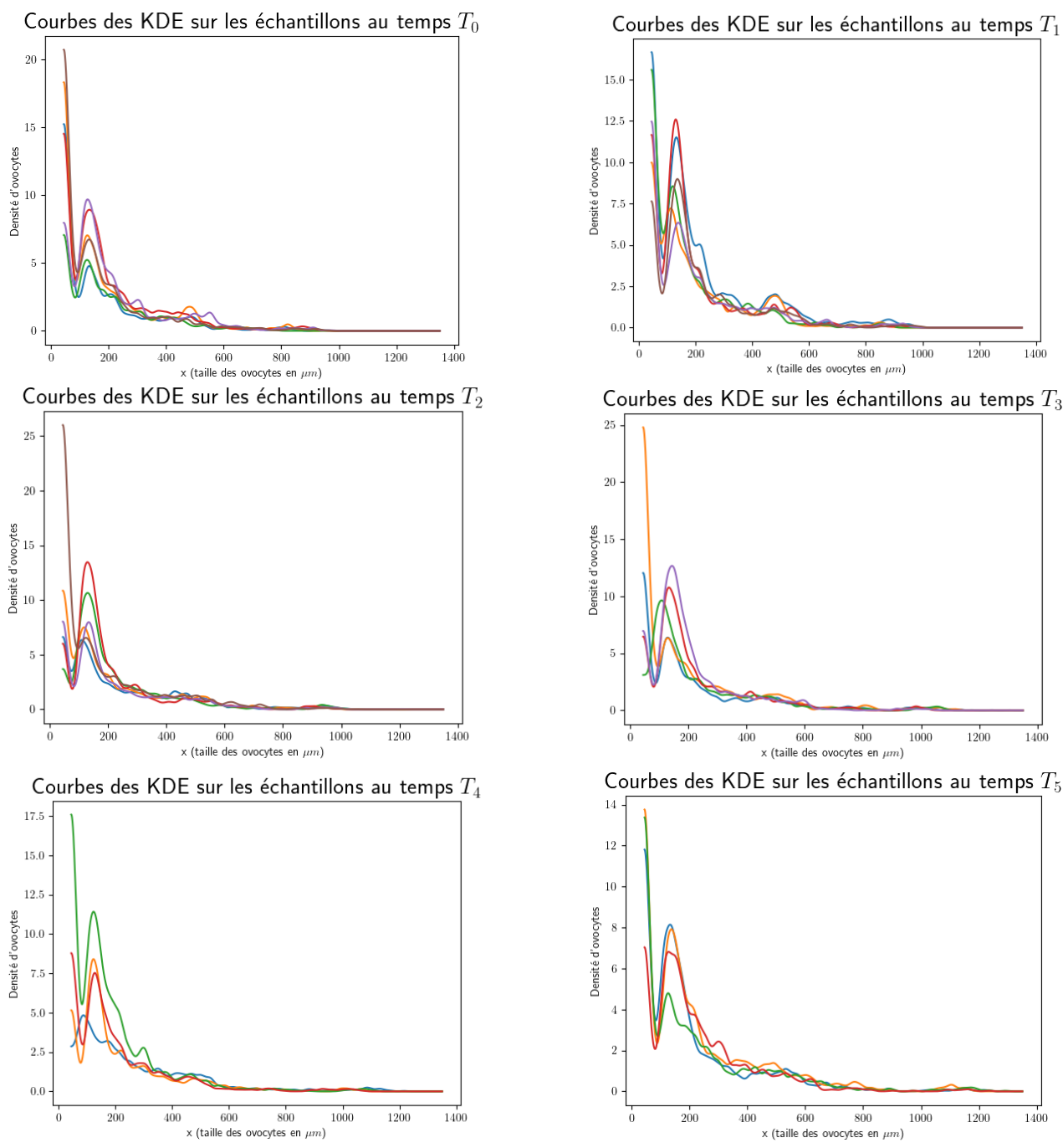


FIGURE 11 : Estimation de la densité en taille des ovocytes pour tous les ovaires observés. Chaque panel correspond à un point de temps. Paramètres des KDE : noyau normal, bandwidth de Silverman divisée par 2.

### 3.3 Analyse des données

Nous allons essayer, par des outils statistiques standard, de confirmer (ou pas) nos premières observations purements visuelles sur la forme des densités ovocytaires des ovaires observés. Tout d'abord, on a remarqué que, au moins quantitativement, les densités ovocytaires observées sont variables en fonction des individus, et ce même pour des échantillons issus d'un même point de temps. On peut donc se demander si le temps a un impact sur la forme des densités, et si oui sur quelle zone (ovocytes de petite, moyenne, grande tailles?), ou si les différentes formes de densité que l'on observe sont uniquement liées à la variabilité individuelle.

### 3.3.1 Influence du temps sur la densité à l'échelle de la ponte

On va effectuer des tests ANOVA sur les nombres d'ovocytes de certaines classe de taille pour savoir si ces classes de tailles sont dépendantes ou non du temps à l'échelle d'une ponte. Commençons par expliquer rapidement ce que fait le test ANOVA.

**One-way ANOVA test :** (test d'analyse de variance)

Le test ANOVA sert à décider si les moyennes de plusieurs groupes sont égales ou différentes. L'hypothèse nulle  $H_0$  est que les moyennes sont toutes égales, et l'hypothèse alternative est qu'au moins deux moyennes sont distinctes.

Les hypothèses stochastiques nécessaires à l'application du test sont les suivantes :

- les échantillons sont indépendants les uns des autres : cette hypothèse est respectée ici car comme l'expérience est invasive, on a un unique prélèvement d'ovaire par individu (donc 1 individu = 1 échantillon à un unique point de temps).
- Normalité : pour chaque groupe, les valeurs du groupe suivent une loi normale (vérifiable avec un test de normalité, comme le test de Kolmogorov-Smirnov)
- Homoscédasticité : les variances de tous les groupes sont égales (vérifiable avec un test d'homoscédasticité, comme le test de Bartlett)

#### Tests effectués :

Considérons une classe de taille d'ovocytes arbitraire. Les groupes que l'on considère sont les 6 groupes  $G_i$ ,  $i \in \{0, \dots, 5\}$ , qui contiennent chacun le nombre d'ovocytes de la classe considérée dans l'ovaire à l'instant  $T_i$ , pour tous les médakas. L'hypothèse de test  $H_0$  est donc : le nombre moyen d'ovocyte de la classe considérée par instant  $T_i$  est identique quelque soit  $i$ .

Classe de taille de  $50\mu m$  : on effectue des tests pour les classes de taille de largeur  $50\mu m$  (classes  $40 - 90\mu m$ ,  $90 - 140\mu m$ , ...,  $1290 - 1340\mu m$ ). Les résultats sont disponibles sur la figure 12. On observe que jusqu'à la classe de taille  $540 - 590\mu m$  incluse, les conditions d'homoscédasticité et de normalité sont vérifiées (voir les deux panel du haut sur la figure, les points sont au dessus de la valeur limite de *pvalue*), et les tests ANOVA valident l'hypothèse  $H_0$ , à savoir que le nombre moyen d'ovocytes des classes considérées ne dépend pas du temps. D'autre part, le test ANOVA sur la classe  $590 - 640\mu m$  rejette l'hypothèse nulle, cette classe est donc dépendante du temps à l'échelle de la ponte. Pour les classes  $640 - 690\mu m$ ,  $690 - 740\mu m$ ,  $740 - 790\mu m$  et  $790 - 840\mu m$ , l'hypothèse  $H_0$  est acceptée, et enfin pour les classes de taille supérieures, les conditions d'homoscédasticité et de normalité ne sont pas vérifiées mais visuellement (voir figure 11), on voit déjà clairement que la densité ovocytaire est dépendante du temps.

Classe de taille de  $20\mu m$  : on fait de nouveaux tests sur les ovocytes de taille allant de 40 à  $900\mu m$  en raffinant le pas des classes de tailles considérées. On considère maintenant des classes de taille de largeur  $20\mu m$ , soient les classes  $40 - 60\mu m$ ,  $60 - 80\mu m$ , jusqu'à  $880 - 900\mu m$ . Les résultats des tests ANOVA sont disponibles sur la figure 13. Premièrement, remarquons que les test d'homoscédasticité et de normalité sont presque tous concluants (i.e. les hypothèses stochastiques pour l'application des tests ANOVA sont vérifiées). On va considérer que tous les tests ANOVA menés sont "valides". En observant le graphe du bas sur la figure 13, on remarque que l'hypothèse  $H_0$  du test ANOVA est acceptée pour toutes les classes sauf trois : les classes  $580 - 600\mu m$ ,  $620 - 640\mu m$  et  $840 - 860\mu m$  (correspond à des classes de fin de vitellogenèse). Ces résultats sont totalement cohérents avec ceux observés précédemment pour des classes de taille de largeur  $50\mu m$ .



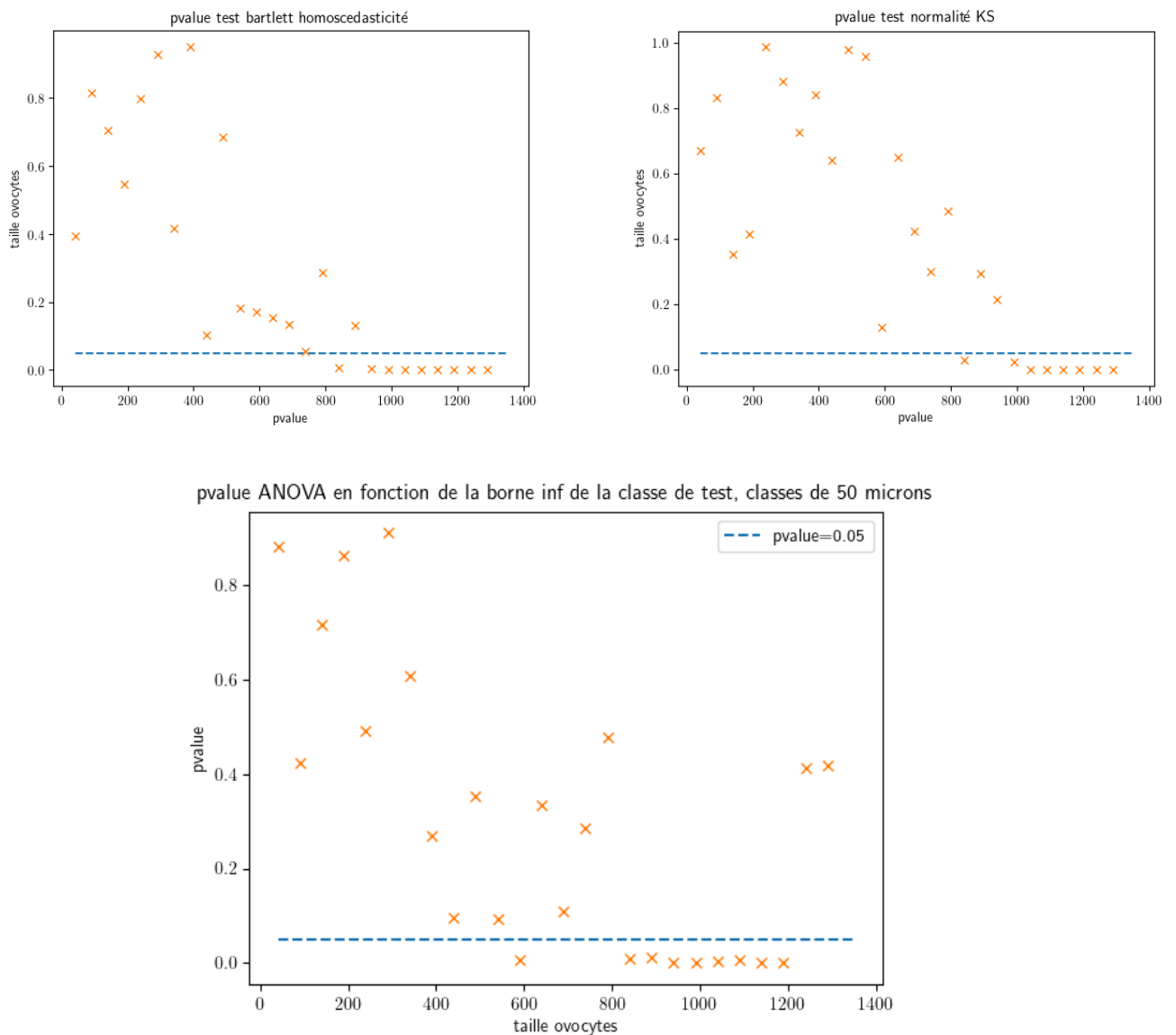


FIGURE 12 : En bas, résultats des tests ANOVA sur le nombre moyen d'ovocytes par instant  $T_i$ . On considère des classes de taille d'ovocytes de largeur  $50\mu m$ , i.e. on considère les classes  $40 - 90\mu m$ ,  $90 - 140\mu m$ , ...,  $1290 - 1340\mu m$ . En haut à gauche, résultats des tests d'homoscédasticité et en haut à droite résultats des tests de normalité, afin de vérifier les hypothèses stochastiques nécessaires à l'application des tests ANOVA. Sur les 3 graphes, on a tracé la valeur limite de  $pvalue = 0.05$  en dessous de laquelle l'hypothèse  $H_0$  est refusée.

Pour résumer, ces tests ANOVA ont permis d'exhiber les faits suivants :

- la densité d'ovocytes pour les ovocytes de la classe  $40 - 580\mu m$  semble indépendante du temps à l'échelle de la ponte, et de même pour la classe  $640 - 840\mu m$ .
- On observe des variations de densité à l'échelle temporelle d'une ponte pour les ovocytes de tailles proche de  $600\mu m$ , et pour les ovocytes de taille égale et supérieure à environ  $850\mu m$ .

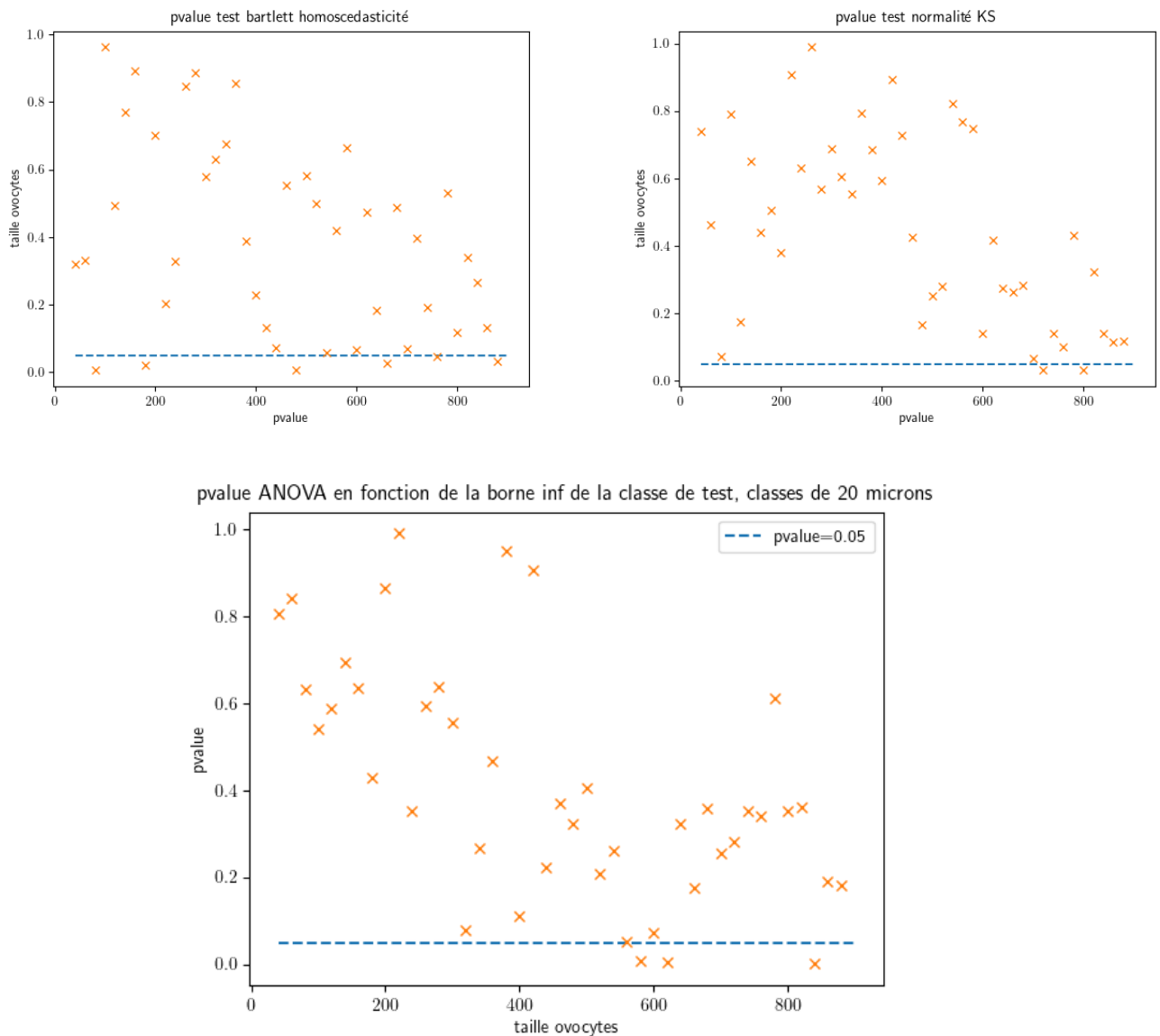


FIGURE 13 : En bas, résultats des tests ANOVA sur le nombre moyen d’ovocytes par instant  $T_i$ . On considère des classes de taille d’ovocytes de largeur  $20\mu m$ , i.e. on considère les classes  $40 - 60\mu m, 60 - 80\mu m, \dots, 880 - 900\mu m$ . En haut à gauche, résultats des tests d’homoscédasticité et en haut à droite résultats des tests de normalité, afin de vérifier les hypothèses stochastiques nécessaires à l’application des tests ANOVA. Sur les 3 graphes, on a tracé la valeur limite de  $pvalue = 0.05$  en dessous de laquelle l’hypothèse  $H_0$  est refusée.

À présent, nous allons nous intéresser à une observation visuelle que l’on avait faite sur la figure 11. Nous avons observé un creux de densité aux alentours de  $80 - 100\mu m$  sur tous les échantillons sauf deux (BT3F8 en vert au temps  $T_3$  et BT4F4 en bleu au temps  $T_4$ ), pour lesquels on n’observe pas de creux de densité dans cette zone.

### 3.3.2 Creux de densité

On veut en savoir un peu plus sur l’emplacement du creux de densité que l’on observe. Ce creux se trouvant dans une zone où le point de temps d’observation n’a pas d’influence sur la densité (voir les tests précédents), on considère tous les échantillons comme issus d’une même

population.

Pour chaque échantillon, on relève l'abscisse (en  $\mu m$ ) correspondant au creux de densité (on applique la fonction minimize du module scipy.optimize sur  $\hat{\rho}$ ). En observant le diagramme Q-Q normal suivant (voir figure suivante), on a l'impression qu'en retirant les deux valeurs "anormales" des échantillons BT3F8 et BT4F4 (dont le creux de densité est situé au niveau de la borne inférieure des tailles d'ovocytes détectables), la position du creux suit une loi normale (car tous les points semblent assez proche de la droite, et répartis assez semblablement de part et d'autre de la droite).

On va procéder à un test de Kolmogorov-Smirnov pour valider notre hypothèse de normalité.

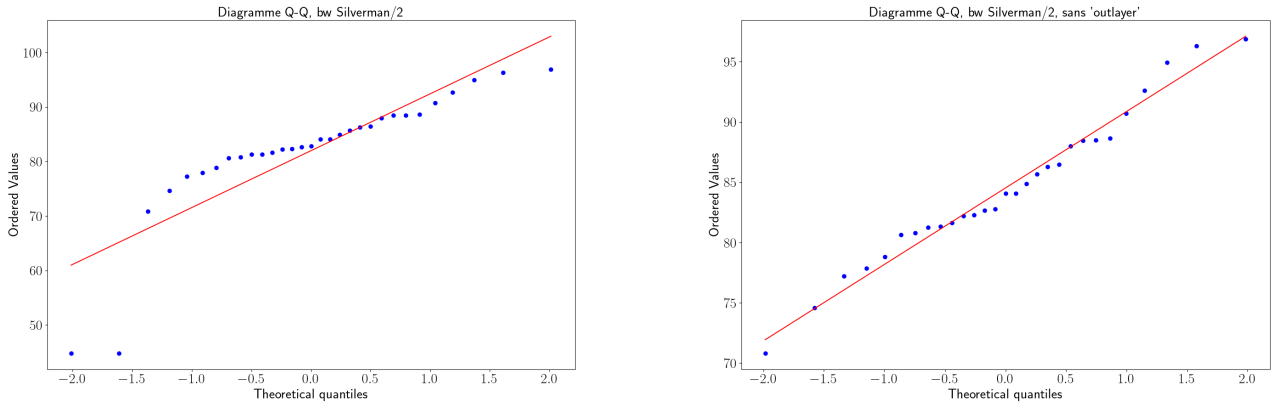


FIGURE 14 : Diagrammes Q-Q normal de l'abscisse du creux de densité observé sur les densités ovocytaires, pour tous les échantillons à gauche et en retirant les échantillons BT3F8 et BT4F4 à droite. Paramètres de KDE : noyau normal et bandwidth de Silverman divisée par 2.

L'hypothèse  $H_0$  de ce test est : la position du creux de densité suit une loi normale.

Cependant, n'oublions pas que la position du creux est dépendante des paramètres du KDE choisis, on va donc effectuer les tests pour plusieurs jeux de paramètres. Les résultats sont disponibles dans le tableau 1. On peut observer que pour n'importe quel jeu de paramètre, l'hypothèse  $H_0$  de normalité est acceptée lorsqu'on retire des échantillons les deux individus BT3F8 et BT4F4, et la pvalue du test est très élevée. En revanche, si on ne retire pas BT3F8 et BT4F4, la pvalue est plus faible et l'hypothèse  $H_0$  peut-être acceptée ou rejetée selon le jeu de paramètre de KDE considéré.

Noyau KDE	Bandwidth KDE	pvalue	pvalue 2	paramètres loi
normal	Silverman/2	0.616	0.865	$N(86.15, 11.75)$
normal	Silverman/3	0.116	0.969	$N(84.29, 6.91)$
normal	Silverman/4	0.068	0.972	$N(84.04, 5.58)$
Epanechnikov	Silverman/2	0.027	0.720	$N(83.55, 5.33)$
Epanechnikov	Silverman/3	0.073	0.651	$N(84.53, 5.07)$

TABLE 1 : Les deux premières colonnes donnent les paramètres (noyau et bandwidth) choisis pour les KDE, la troisième colonne donne la pvalue du test KS de normalité de l'abscisse du creux de densité sur tous les échantillons, la quatrième colonne donne la pvalue du test KS en excluant les échantillons BT3F8 et BT4F4, et la cinquième colonne donne les paramètres de la loi normale testée.

En conclusion, les deux échantillons BT3F8 et BT4F4 sont assez particuliers, et on peut se demander si les mesures de taille d'ovocytes qui ont été faites ne sont pas erronés. Si on néglige ces deux échantillons, on observe sur tous les autres échantillons un creux de densité d'ovocytes autour de  $84\mu m$ , et la position de ce creux semble suivre une loi normale (dont la moyenne est proche de  $84\mu m$ , cependant l'écart type dépend fortement du choix des paramètres de KDE). Si on se base sur la classification d'Iwamatsu (voir figure 3), cela correspond au passage du stade II au stade III (sortie de cradle).

## 4 Modèle mathématique

### 4.1 Rapide état de l'art sur les modèles mathématiques d'ovogenèse

La dynamique de l'ovogenèse étant complexe (et spécifique), elle est étudiée à plusieurs échelles. Il est tout aussi important de comprendre la dynamique des populations de follicules à l'échelle de l'ovaire entier, que d'étudier la dynamique de l'ovocyte et des cellules somatiques au sein d'un follicule ovarien (voir [5] pour plus de précisions). Nous allons concentrer ici l'état de l'art sur les modèles qui concernent la dynamique des populations ovocytaires à l'échelle de l'ovaire.

Des modèles mathématiques d'ovogenèse de poissons ont déjà été développés. Cependant, la plupart ne représentent que la croissance de l'ovocyte (variable scalaire correspondant au diamètre ou au volume) avec un taux de croissance uniforme ou modulé à la marge par une entrée extérieure [12, 20]. À ma connaissance, le seul modèle traitant de la dynamique des populations ovocytaires chez les poissons avec un taux de croissance "variable" (constant par morceaux, avec une valeur constante assignée à chaque classe d'ovocytes), développé et validé avec des résultats expérimentaux, est celui développé par Marie Haghebaert [13] puis par Daniel Desoutter [7] dans le cadre du projet ANR Dynamo.

Les modèles de dynamique des populations ovocytaires existants sont plutôt appliqués aux mammifères (souris, homme par exemple). Nous allons détailler ces différents types de modèles, qui sont conceptuellement proches de ce qui pourrait se faire chez les poissons.

Historiquement, les premiers modèles mécanistiques décrivant la population ovocytaire de mammifères sont des modèles dits "compartimentaux" [9, 10]. Les ovocytes sont classés en différents stades de maturité, et le passage d'un stade à un autre est régi par un taux/une probabilité de maturation. Il existe deux types de modèles compartimentaux : les modèles déterministes (le modèle poisson de Marie Haghebaert et Daniel Desoutter en est un exemple), et les modèles stochastiques (voir [1] par exemple). La force de ces modèles est qu'ils exploitent complètement les données expérimentales sur le nombre de follicules et leurs tailles (variable choisie pour déterminer le stade de maturité des follicules). Notons que seuls des modèles compartimentaux linéaires ont été ajustés avec des données expérimentales, excepté le modèle décrit dans [2], ajusté sur des données souris.

Toujours dans les modèles dit mécanistiques, il existe des modèles formulés continûment dans un formalisme de type équation aux dérivées partielles (voir par exemple [3], qui présente aussi des modèles compartimentaux déterministe et stochastique). Cette approche permet d'avoir une représentation continue de la population ovocytaire (par opposition à la représentation compartimentale). Parmi les modèles classiques de dynamique de populations cellulaires applicable aussi en folliculaire [4], on peut citer l'équation de McKendrick-von Foester [16].

Il existe aussi des modèles dits "individus-centré" [12, 20] : le nombre d'individu (follicules) est discret, mais leur variable de structure (taille) est continue.

Enfin, on peut aussi noter l'existence de modèles de régression statistique (donc pas mécanistiques), principalement utilisés pour traiter de l'épuisement du pool de follicules de la réserve chez les mammifères (voir par exemple [14]).

## 4.2 Choix de modélisation

Compte tenu des objectifs/motivations du modèle, des connaissances biologiques sur l'ovogénèse de poisson et des données expérimentales dont l'on dispose, on veut un modèle qui vérifie les principes suivants :

- Pour se rapprocher des données expérimentales disponibles, on choisira un modèle qui n'a que la taille des ovocytes/follicules comme variable de maturité des ovocytes.
- Le processus de croissance des ovocytes étant continu, et compte-tenu des données disponibles (beaucoup d'ovocytes et de toutes les tailles dans les ovaires observés), on prendra la variable de maturité (la taille) continue.
- Les interactions entre follicules étant nombreuses et ayant un rôle central (voir section 2.3), on prendra soin à ce que le modèle puisse les prendre en compte.

## 4.3 Modèle

Nous allons présenter ici un modèle EDP qui s'inspire du modèle présenté dans l'article [3] et adapté aux mammifères. Il n'a qu'une seule variable "structurante" (la taille des ovocytes), l'EDP est donc 1D. Ce modèle a la particularité d'être non linéaire, de façon à tenir compte des régulations hormonales et des interactions entre follicules.

Par rapport au modèle EDP développé dans [3], on rajoute seulement un terme de renouvellement  $r_0$  dans le cradle afin de représenter le renouvellement par mitose des cellules germinales primordiales (PGC) et des ovogonies (voir figure 6), qui n'existe quasiment pas une fois passé le développement embryonnaire chez les mammifères.

On note  $\rho_c(t)$  le nombre d'ovocytes du cradle à l'instant  $t$  et  $\rho(t, x)$  la densité de population d'ovocytes de taille  $x$ , à l'instant  $t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho(t, x) = -\partial_x (\lambda(\rho(t, \cdot), x) \rho(t, x)) - \mu(\rho(t, \cdot), x) \rho(t, x), \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0 \\ \rho'_c(t) = (r_0(\rho(t, \cdot)) - \lambda_0(\rho(t, \cdot)) - \mu_0(\rho(t, \cdot))) \rho_c(t), \quad t \geq 0, \quad \rho_c(0) = \rho_c^0 \\ \rho(t=0, x) = \rho_0(x), \quad x \in (0, 1) \\ \lambda_0(\rho(t, \cdot)) \rho_c(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \lambda(\rho(t, \cdot), x) \rho(t, x), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

avec :

$$\lambda_0(\rho(t, \cdot)) = \frac{f_0}{1 + K_{1,0} \int_0^1 a(y) \rho(t, y) dy}, \quad \mu_0(\rho(t, \cdot)) = g_0 \left( 1 + K_{2,0} \int_0^1 b(y) \rho(t, y) dy \right) \quad (2)$$

et  $\forall x \in (0, 1)$ ,

$$\lambda(\rho(t, \cdot), x) = \frac{f(x)}{1 + K_1(x) \int_0^1 \omega_1(y) \rho(t, y) dy}, \quad \mu(\rho(t, \cdot), x) = g(x) \left( 1 + K_2(x) \int_0^1 \omega_2(y) \rho(t, y) dy \right) \quad (3)$$

avec  $f, g, K_1, K_2, a, b, \omega_1, \omega_2, \rho^0$  des fonctions assez régulières, et positives.

La formulation initiale de ces taux est la conséquence des connaissances présupposées sur le sens des interactions entre les follicules chez les mammifères. Cependant, il faut rester prudent sur la forme de ces taux car l'on observe des interactions de nature différente chez les poissons (phénomène d'auto-amplification pour les ovocytes au stade de vitellogénèse par exemple, voir

section 2.3).

**Modèle final :**

On écrit donc les non linéarités dans les taux sous une forme plus générale. De plus, ne disposant pas d'informations suffisantes sur la dynamique au stade pré-folliculaire chez les poissons, on ne considérera pas l'EDO qui la caractérise. Notons aussi que bien que la "mort" des ovocytes chez le medaka ne semble pas exister en conditions physiologiques normales (contrairement à ce qu'on observe chez les mammifères), elle peut exister dans des conditions particulières (inactivation de l'AMH par exemple [32]). Le taux de mortalité  $\mu$  mérite donc d'exister. Finalement, on considère donc le modèle EDP suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho(t, x) = -\partial_x (\lambda ((W_i(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) \rho(t, x)) - \mu ((W_i(t))_{n_1+1 \leq i \leq n_1+n_2}, x) \rho(t, x), \\ x \in (0, 1), t \geq 0 \\ \rho(t = 0, x) = \rho_0(x), \quad x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda ((W_i(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) \rho(t, x) = r(t, (W_i(t))_{n_1+n_2 < i \leq n_1+n_2+n_3}), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

avec  $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^2$  et  $\forall i \in \{1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$ ,  $W_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy$ .

Notons que l'on peut définir  $P$  la quantité d'oeufs pondus à partir de l'équation différentielle suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lambda (\rho(t, \cdot), x) \rho(t, x) = P'(t), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

Dans la zoologie des problèmes EDP, on peut qualifier ce problème (4) d'équation de transport-réaction (i.e. avec un terme source) non linéaire. Le terme de vitesse  $\lambda$  est non-local (il fait intervenir la valeur de la solution  $\rho$  en plusieurs points, à travers les termes intégraux), tout comme le terme source  $\mu$  et le flux d'entrée  $r$ .

On peut voir ce problème comme une généralisation du problème suivant (equation de transport conservative avec vitesse non-locale), étudié notamment dans l'article [29] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho(t, x) = -\partial_x (\lambda (W(t), x) \rho(t, x)), \\ x \in (0, 1), t \geq 0 \\ \rho(t = 0, x) = \rho_0(x), \quad x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda (W(t), x) \rho(t, x) = r(t), \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

où  $W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx$ ,

L'article [29] montre notamment l'existence-unicité d'une solution faible de ce problème sous les hypothèses suivantes :

- $\rho_0 \in L^\infty(0, 1)$  et positive presque partout
- $r \in L^\infty(0, T) \forall T > 0$  et positive presque partout
- $\lambda \in C^1([0, +\infty) \times [0, 1])$  et strictement positive

## 4.4 Existence-Unicité d'une solution faible du problème non linéaire

On va montrer, sous certaines hypothèses bien choisies, l'existence-unicité d'une solution faible de (4) sur tout intervalle de temps  $[0, T]$  avec  $T > 0$ , que l'on définit comme suit :

**Definition 4.1** (Solution faible). *Soit  $T > 0$ , une solution faible du problème (4) est une fonction  $\rho \in C^0([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, T) \times (0, 1))$  telle que  $\forall \tau \in [0, T]$  et  $\forall \varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\varphi(\tau, x) = 0 \ \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi(t, 1) = 0 \ \forall t \in [0, \tau]$ , on a :*

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_i(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_i(t))_{n_1 < i \leq n_1 + n_2}, x) \varphi(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\tau r(t, (W_i(t))_{n_1 + n_2 < i \leq N}) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$ ,  $W_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy$

### 4.4.1 Hypothèses

Dans toute la section qui suit, on considère les hypothèses suivantes :

- $\rho_0 \in L^\infty(0, 1)$ ,  $\rho_0 \geq 0$
- $\lambda \in C^1([0, +\infty)^{n_1} \times [0, 1])$ ,  $\lambda > 0$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$  quelconque
- $\mu \in C^1([0, +\infty)^{n_2} \times [0, 1])$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $n_2 \in \mathbb{N}$  quelconque
- $r \in C^1([0, +\infty) \times ([0, +\infty)^{n_3})$ ,  $r \geq 0$ ,  $n_3 \in \mathbb{N}$  quelconque,
- $r$  est sous-linéaire au sens suivant :  $\exists j_0 \in \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$  tel que  $\forall t \in [0, +\infty)$ ,  $\forall (W_i)_{n_1 + n_2 < i \leq n_1 + n_2 + n_3} \in ([0, +\infty)^{n_3}$ , on a  $|r(t, (W_i)_i)| \leq r_0(t) + r_1(t) W_{j_0}$  où  $r_0$  et  $r_1$  sont des fonctions dans  $L^\infty(0, T)$ ,  $\forall T > 0$ .
- $\forall i \in \{1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\} : \omega_i \in C^0([0, 1])$ ,  $L_{\omega_i}$ -lipschitzienne,  $\omega_i \geq 0$

### 4.4.2 Définitions et notations

On définit les notations suivantes :

- $N := n_1 + n_2 + n_3$  (strictement positif, pour ne pas être dans le cas "simple" du problème EDP linéaire)
- Pour toute fonction  $f$  (essentiellement) bornée sur un intervalle  $I$ , on notera  $\|f\|_{\infty, I} = \text{ess sup}_{x \in I} |f(x)|$ . Lorsque l'intervalle  $I$  est évident (intervalle de définition de la fonction par exemple), on notera simplement  $\|f\|_\infty$ , et lorsque la norme utilisée est évidente, on notera simplement  $\|f\|$ .
- $\forall T > 0$ ,

$$M_{j_0}(T) = M_{j_0} := \max \left( 2 \|\omega_{j_0}\|_\infty \|\rho_0\|_\infty, \|\omega_{j_0}\|_\infty (T \|r_0\|_\infty + \|\rho_0\|_\infty) e^{\|\omega_{j_0}\|_\infty \|r_1\|_\infty T} \right) \quad (7)$$



- $\forall i \in \{1, \dots, N\}, i \neq j_0, \forall T > 0,$

$$M_i(T) = M_i := T \|\omega_i\|_\infty (\|r_0\|_\infty + \|r_1\|_\infty M_{j_0}) + \|\omega_i\|_\infty \|\rho_0\|_\infty \quad (8)$$

- $\lambda^i(M_1, \dots, M_{n_1}) = \lambda^i = \min_{\prod_{1 \leq j \leq n_1} [0, M_j]} \lambda(\cdot, 0) > 0$  (bien défini et strictement positif car  $\lambda(\cdot, 0)$  est continue et strictement positive sur le compact  $\prod_{1 \leq j \leq n_1} [0, M_j]$ )

- Pour ne pas alourdir les calculs, on notera parfois :

$$\lambda((W_i(t))_i, x) := \lambda(W_1(t), \dots, W_{n_1}(t), x), \quad \mu((W_i(t))_i, x) := \mu(W_{n_1+1}(t), \dots, W_{n_1+n_2}(t), x)$$

et  $r(t, (W_i(t))_i) = r(t, W_{n_1+n_2+1}(t), \dots, W_N(t))$

### 4.4.3 Préliminaires

Dans tout cette section, on se donne  $(W_i)_{1 \leq i \leq n_1}$  des fonctions continues sur  $[0, T]$  avec  $0 \leq W_i(s) \leq M_i, \forall 0 \leq s \leq T$ .

**Proposition 4.1** (Existence courbes caractéristiques). *Soit  $T > 0$ . Pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$  le problème de Cauchy suivant a une unique solution maximale, strictement croissante.*

$$\frac{d\xi}{ds}(s) = \lambda((W_i(s))_{1 \leq i \leq n_1}, \xi(s)), \quad \xi(t) = x$$

*Cette solution est définie sur  $[t_{min}, t_{max}] \subset [0, T]$ , avec  $t_{min} = t_0$  si il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\xi(t_0) = 0$ ,  $t_{min} = 0$  sinon, et  $t_{max} = t_1$  si il existe  $t_1 < T$  tel que  $\xi(t_1) = 1$ ,  $t_{max} = T$  sinon (voir figure 15).*

*Démonstration.* preuve "immédiate", conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz et des hypothèses sur  $\lambda$  et  $(W_i)_i$   $\lambda \in C^1([0, +\infty))^{n_1} \times [0, 1]$ .  $\square$

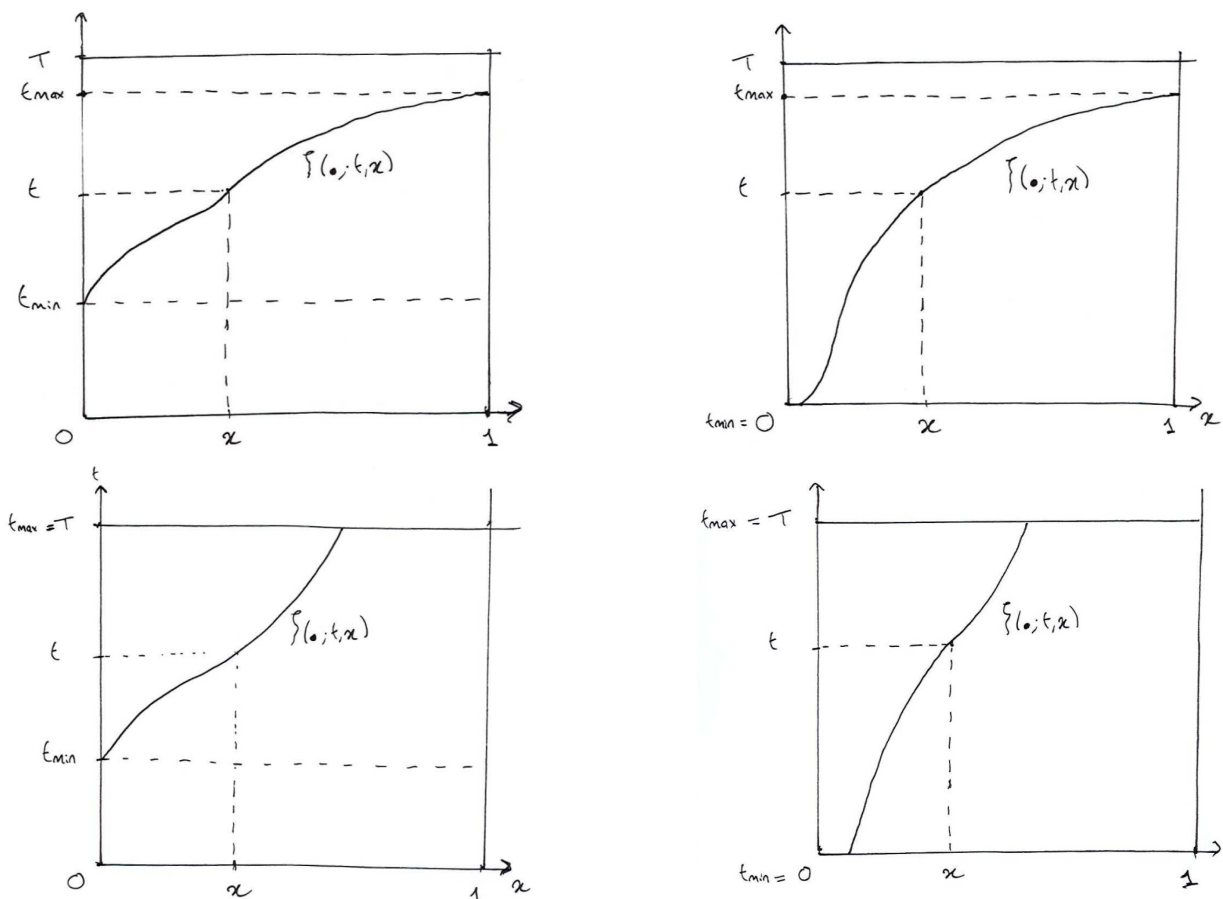


FIGURE 15 : Exemples de courbes caractéristiques, et leurs domaines de définitions.

**Definition 4.2** (Courbes caractéristiques). Soit  $T > 0$ . On définit les courbes caractéristiques  $\xi_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 4\}$  comme les solutions des EDO suivantes :

$$\frac{d\xi_j}{ds}(s) = \lambda((W_i(s)_{1 \leq i \leq n_1}), \xi_j(s)), \quad j \in \{1, \dots, 4\}$$

avec les conditions initiales :

- $\xi_1(t) = 1$  pour un  $t$  donné
- $\xi_2(0) = 0$
- $\xi_3(t) = x$  pour  $t$  donné et  $x \in [0, \xi_2(t)]$ , ou pour  $x \in [0, 1]$  si  $\xi_2(t)$  n'est pas défini.
- $\xi_4(t) = x$  pour  $t$  donné et  $x \in [\xi_2(t), 1]$  (définie seulement si  $\xi_2(t)$  est bien défini)

On notera parfois  $\xi_j(s) = \xi_j(s; t, x)$ ,  $j \in \{1, 3, 4\}$  pour préciser les conditions initiales.

**Proposition 4.2.** Soit  $t > 0$  assez petit de façon à ce que  $\xi_2(t)$  soit bien définie (un tel  $t$  existe car  $\xi_2(0) = 0$  et  $\xi_2$  est continue).

- Soit  $x \in [0, \xi_2(t)]$ . Alors il existe un unique  $\alpha(t, x) \in [0, t]$  tel que  $\xi_3(\alpha(t, x); t, x) = 0$ .
- Soit  $x \in [\xi_2(t), 1]$ . Alors il existe un unique  $\beta(t, x) \in [0, \xi_1(0; t, 1)]$  tel que  $\xi_4(0; t, x) = \beta(t, x)$ .

On peut alors définir les fonctions suivantes :

$$\alpha_t : [0; \xi_2(t)] \rightarrow [0; t] \quad \beta_t : [\xi_2(t), 1] \rightarrow [0; \xi_1(0; t, 1)]$$

$$x \mapsto \alpha(t, x) \quad x \mapsto \beta(t, x)$$

De plus,  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont bijectives et :

- $\forall u \in [0, t], \alpha_t^{-1}(u) = \xi_3(t; u, 0)$
- $\forall y \in [0, \xi_1(0; t, 1)], \beta_t^{-1}(y) = \xi_4(t; 0, y)$

La figure 16 illustre les résultats énoncés dans cette proposition.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de l'existence et de l'unicité des courbes caractéristiques.  $\square$

**Remarque 4.1.** Si  $\xi_2(t)$  n'est pas définie, alors on peut toujours définir  $\alpha$  de la même manière (pour tout  $x \in [0, 1]$ ), et la fonction suivante :

$$\alpha_t : [0; 1] \rightarrow [\alpha(t, 1); t]$$

$$x \mapsto \alpha(t, x)$$

est bien définie, bijective et on a toujours  $\alpha_t^{-1}(u) = \xi_3(t; u, 0)$  (pour tout  $u \in [\alpha(t, 1); t]$ ). Cependant, on a plus l'existence d'un  $\beta(t, x)$ . La figure 17 illustre cette remarque.

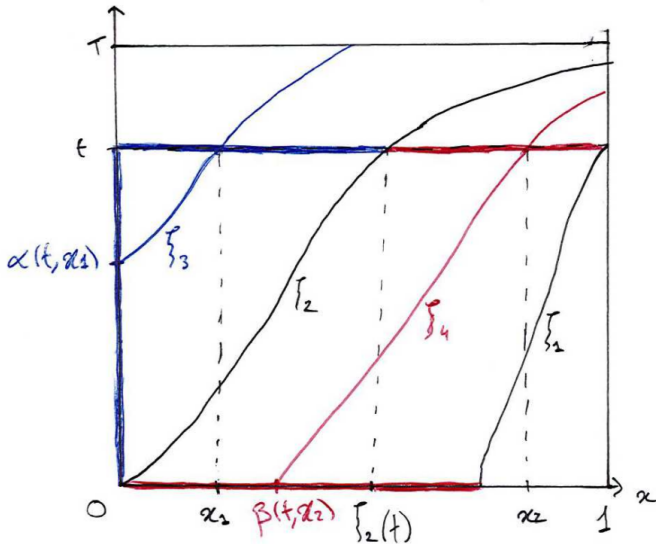


FIGURE 16 : Schéma des courbes caractéristiques  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3(\cdot; t, x_1)$  (avec  $x_1 \in [0, \xi_2(t)]$ ) et  $\xi_4(\cdot; t, x_2)$  (avec  $x_2 \in [\xi_2(t), 1]$ ), dans le cas  $t \leq \xi_2^{-1}(1) \leq T$  ( $\xi_2(t)$  défini), donc  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  bien définies. Les intervalles en rouge (resp. bleu) sont en bijection.

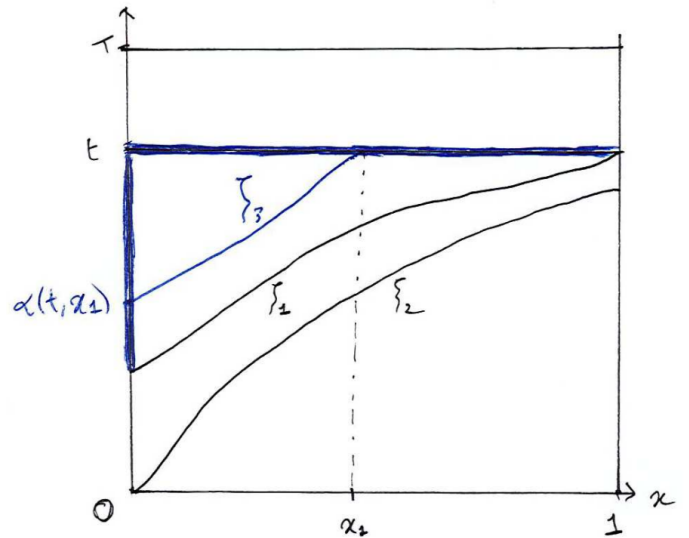


FIGURE 17 : Schéma des courbes caractéristiques  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3(\cdot; t, x_1)$  (avec  $x_1 \in [0, 1]$ ), dans le cas  $t > \xi_2^{-1}(1)$  ( $\xi_2(t)$  n'est pas défini), donc  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\xi_4(\cdot; t, x)$  n'est pas défini et donc  $\beta_t(x)$  aussi. Les intervalles en bleu sont en bijection.

**Remarque 4.2.** Si  $t \leq \frac{1}{\|\lambda\|_{\infty, \Pi[0; M_i] \times [0; 1]}}$ , alors  $\xi_2(t)$  est bien défini. En effet, soit  $s$  dans l'intervalle de définition  $[0, t_{max}]$  de  $\xi_2$ .

On a  $\xi_2(s) = \int_0^s \lambda((W_i)_i, \xi_2(\theta)) d\theta$ , donc si  $0 \leq s \leq t$  :

$$\xi_2(s) \leq s \|\lambda\|_{\infty} \leq t \|\lambda\|_{\infty} \leq 1$$

Donc  $\xi_2(t)$  est bien défini (i.e.  $t < t_{max}$ ).

**Definition 4.3** (Domaines de définition de  $\alpha$  et  $\beta$ ). Si  $\xi_2^{-1}(1) \leq T$  existe, alors on définit  $D_\alpha$  et  $D_\beta$  de la manière suivante :

- $D_\alpha := \{(t, x) / 0 \leq t \leq \xi_2^{-1}(1), 0 \leq x \leq \xi_2(t) \text{ ou } \xi_2^{-1}(1) \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$
- $D_\beta := \{(t, x) / 0 \leq t \leq \xi_2^{-1}(1), \xi_2(t) \leq x \leq 1\}$

Si non, (i.e.  $\xi_2(T)$  existe et  $\xi_2(T) < 1$ ) :

- $D_\alpha := \{(t, x) / 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \xi_2(t)\}$
- $D_\beta := \{(t, x) / 0 \leq t \leq T, \xi_2(t) \leq x \leq 1\}$

**Proposition 4.3** (dérivées de  $\alpha$  et  $\beta$ ).  $\alpha$  est différentiable sur  $D_\alpha$  et  $\beta$  est différentiable sur  $D_\beta$ . De plus, on a :

- $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\lambda((W_i(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x)}{\lambda((W_i(\alpha))_{1 \leq i \leq n_1}, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_i(\theta))_{1 \leq i \leq n_1}, \xi_3(\theta)) d\theta}$
- $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda((W_i(\alpha))_{1 \leq i \leq n_1}, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_i(\theta))_{1 \leq i \leq n_1}, \xi_3(\theta)) d\theta}$
- $\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\lambda((W_i(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_i(\theta))_{1 \leq i \leq n_1}, \xi_4(\theta)) d\theta}$
- $\frac{\partial \beta}{\partial x} = e^{-\int_0^t \lambda_x((W_i(\theta))_{1 \leq i \leq n_1}, \xi_4(\theta)) d\theta}$

*Démonstration.* admis (voir [19] pour une preuve) □

**Proposition 4.4.** Soit  $t$  assez petit tel que  $\xi_2(t)$  bien défini. Avec les notations introduites précédemment, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_2(t)} \frac{r(\alpha, (W_i(\alpha))_i)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy \\ &= \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\ & \int_{\xi_2(t)}^1 \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy \\ &= \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir en annexe A.1 pour la preuve détaillée. L'idée est de faire les changements de variables  $u = \alpha_t(y)$  et  $x = \beta_t(y)$ , en utilisant la proposition 4.3. □

**Proposition 4.5** (solution linéaire). *Soit  $\delta > 0$  et assez petit pour que  $\xi_2(\delta)$  soit bien défini, le problème (4) admet une unique solution donnée par la formule explicite suivante sur  $[0, \delta] \times [0, 1]$  :*

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \frac{r(\alpha, (W_i(\alpha))_i)}{\lambda((W_i(\alpha))_i, 0)} e^{-\int_0^t \lambda_x((W_i(\theta))_i, \xi_3(\theta)) + \mu((W_i(\theta))_i, \xi_3(\theta)) d\theta} & 0 \leq x \leq \xi_2(t), 0 \leq t \leq \delta \\ \rho(t, x) = \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_i(\theta))_i, \xi_4(\theta)) + \mu((W_i(\theta))_i, \xi_4(\theta)) d\theta}, & \xi_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \delta \end{cases} \quad (9)$$

*Démonstration.* On ne détaille pas car il y aurait beaucoup de redondances avec la preuve que l'on présentera pour l'existence-unicité du modèle non linéaire, mais voici l'idée :

Existence : La preuve de l'existence est très similaire à celle du théorème 4.2, la seule différence notable est que dans le cas du problème linéaire, on n'a pas à montrer que les  $(W_i)_i$  point fixe de  $F$  vérifient bien  $W_i(t) = \int_0^1 \rho(t, \cdot) \omega_i$ .

Unicité : La preuve est complètement similaire à la partie 1. de la preuve du théorème 4.3 d'unicité dans le cas non linéaire.  $\square$

#### 4.4.4 Résultat principal et principe de la preuve

Le résultat principal de la section est l'existence-unicité d'une solution faible sur  $[0, T] \times [0, 1]$ ,  $\forall T > 0$ , pour laquelle on aura aussi une formule "semi-analytique". On peut le formuler sous la forme du théorème suivant :

**Théorème 4.1** (Existence et unicité d'une solution faible globale). *Soit  $T > 0$ , le problème (4) admet une unique solution faible (globale)  $\rho \in C^0([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ . De plus  $\rho \in C^0([0, T]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ .*

$\rho$  vérifie :

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta}, & \xi_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \\ \rho(t, x) = \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

avec  $W_j(\theta) = \int_0^1 \omega_j(y) \rho(\theta, y) dy$ ,  $\alpha = \alpha(t, x)$ ,  $\beta = \beta(t, x)$ ,  $\xi_3(\theta) = \xi_3(\theta; t, x)$  et  $\xi_4(\theta) = \xi_4(\theta; t, x)$ .

Le principe de la preuve est le suivant (il est inspiré de la preuve d'existence-unicité dans [29]) :

Soit  $t$  assez petit tel que  $\xi_2(t) \leq 1$  bien défini. Si  $\rho$  est une solution, alors on peut montrer qu'elle est de la forme donnée par la proposition 4.5, avec  $W_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy &= \int_0^{\xi_2(t)} \frac{r(\alpha, (W_i(\alpha))_i)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy \\ &\quad + \int_{\xi_2(t)}^1 \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy \end{aligned}$$

avec  $\alpha = \alpha(t, y)$ ,  $\beta = \beta(t, y)$ ,  $\xi_3(\theta) = \xi_3(\theta; t, y)$  et  $\xi_4(\theta) = \xi_4(\theta; t, y)$  et  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $W_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy$ .

Et avec la proposition 4.4,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  :

$$\begin{aligned}
W_i(t) &= \int_0^1 \omega_i(y) \rho(t, y) dy = \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\
&\quad + \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx
\end{aligned} \tag{11}$$

Donc si  $\rho$  est une solution, (11) doit être vérifiée pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , et pour tout  $t$  assez petit tel que  $\xi_2(t)$  bien défini.

Nous allons donc raisonner dans l'autre sens : on va montrer qu'il existe des  $W_i$  (uniques) qui vérifient (11), et à partir de ces  $W_i$  nous allons définir comme il faut (i.e. avec (9)) notre candidat à être une solution. Pour montrer l'existence-unicité des  $W_i$ , qui est le point clé de la preuve, on passera par un théorème de point fixe pour les applications contractantes.

Cependant, on ne peut montrer l'existence-unicité des  $W_i$  qui vérifient (11), et donc l'existence-unicité d'une solution de (4), que sur un petit intervalle temporel. On va donc dans un second temps devoir étendre notre solution locale en une solution globale définie sur l'intervalle temporel  $[0, T]$  tout entier.

#### 4.4.5 Preuve de l'existence-unicité

Introduisons l'espace suivant, qui va servir à définir l'espace de définition de l'application contractante :

**Definition 4.4.** Soit  $\delta > 0$  et  $M > 0$ . On définit l'espace suivant :

$$\Omega_{\delta, M} := \{W \in C^0([0, \delta]) : W \geq 0 \text{ et } \|W\|_{C^0([0, \delta])} := \sup_{0 \leq t \leq \delta} |W(t)| \leq M\}$$

**Proposition 4.6.** Soit  $\delta > 0$  et  $M > 0$ . Alors  $\Omega_{\delta, M}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{C^0([0, \delta])}$  est un espace métrique complet.

*Démonstration.*  $\Omega_{\delta, M}$  est un fermé de  $C^0([0, \delta])$  muni de sa norme  $\|\cdot\|_{C^0([0, \delta])}$  qui est un espace complet. Or, tout espace fermé d'un espace complet est complet.  $\square$

À présent, on peut définir notre application sur laquelle on voudra appliquer un théorème de point fixe.

**Definition 4.5** (application contractante). Soit  $T > 0$ .

Soit  $\delta > 0$  et  $\delta < \min(\frac{1}{\|\lambda\|_{\infty, \Pi[0; M_i] \times [0; 1]}}, T)$  (cette majoration assure le fait que  $\xi_2(t)$  soit bien défini pour tout  $t \leq \delta$ , voir remarque 4.2). Soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned}
F: \prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i} &\longrightarrow (C^0([0, \delta]))^N \\
(W_1, \dots, W_N) &\longmapsto (F_1(W_1, \dots, W_N), \dots, F_N(W_1, \dots, W_N))
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_i(W_1, \dots, W_N)(t) &= \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\
&\quad + \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx
\end{aligned}$$

**Proposition 4.7.** *L'application  $F$  est bien définie.*

*Démonstration.* On veut montrer que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall (W_1, \dots, W_N) \in \prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i}$ ,

on a  $F_i(W_1, \dots, W_N) \in C^0([0, \delta])$ .

L'idée est d'utiliser le théorème de convergence dominée. La continuité des fonctions sous les intégrales en la variable  $t$  se vérifie facilement (en utilisant la continuité du flot notamment), et les hypothèses sur  $\rho_0$  (bornée),  $\mu$  (positive),  $\omega_i$  (bornées car continue sur un compact), et  $r$  (bornée sur compact) permettent d'obtenir un fonction majorante intégrable, indépendante de  $t$ . Pour le détail de la preuve, voir en annexe A.2.  $\square$

**Proposition 4.8.** *L'application  $F$  est à valeur dans  $\prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i}$  pour  $\delta$  assez petit (voir condition exacte dans l'équation (12)).*

*Démonstration.* Soit  $\delta \leq \min(T, \frac{1}{\|\lambda\|_\infty})$  et  $t \in [0, \delta]$ . Soient  $(W_1, \dots, W_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  et  $i \in$

$\{1, \dots, N\}$ . Remarquons d'abord que dans la définition des  $F_i$ , toutes les fonctions sous les intégrales sont positives par définition, donc les  $F_i$  sont positifs.

D'autre part,  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in [0, \delta]$  :

$$\begin{aligned} F_i(W_1, \dots, W_N)(t) &\leq \|\omega_i\|_{\infty, [0,1]} \|r_0\|_{\infty, [0,T]} t + \|\omega_i\|_{\infty, [0,1]} \|r_1\|_{\infty, [0,T]} \|W_{j_0}\|_{\infty, [0,\delta]} t + \|\rho_0\|_{\infty, [0,1]} \|\omega_i\|_{\infty, [0,1]} \\ &\leq t \|\omega_i\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0}) + \|\omega_i\| \|\rho_0\| \end{aligned}$$

Donc pour  $i \in \{1, \dots, N\}, i \neq j_0$ , en utilisant directement la définition des  $M_i$  (voir (8)), on a :

$$\|F_i(W_1, \dots, W_N)\|_{C^0([0,\delta])} \leq T \|\omega_i\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0}) + \|\omega_i\| \|\rho_0\| = M_i$$

Et pour  $i = j_0$ , on a :

$$F_{j_0}(W_1, \dots, W_N)(t) \leq \delta \|\omega_{j_0}\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0}) + \|\omega_{j_0}\| \|\rho_0\|$$

donc pour  $\delta \leq \frac{M_{j_0} - \|\omega_{j_0}\| \|\rho_0\|}{\|\omega_{j_0}\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0})}$  on a :

$$\|F_{j_0}(W_1, \dots, W_N)\| \leq M_{j_0}$$

Comme  $M_{j_0} \geq 2 \|\omega_{j_0}\| \|\rho_0\|$  (voir (7)), on peut choisir  $\delta \leq \frac{\|\omega_{j_0}\| \|\rho_0\|}{\|\omega_{j_0}\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0})}$ .

Donc pour

$$\delta \leq \min \left( T, \frac{1}{\|\lambda\|_\infty}, \frac{\|\omega_{j_0}\| \|\rho_0\|}{\|\omega_{j_0}\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0})} \right), \quad (12)$$

$F$  est à valeur dans  $\prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i}$ .  $\square$

**Proposition 4.9.** *Pour  $\delta$  assez petit (voir condition exacte dans l'équation (36) dans la preuve en annexe),  $F$  est une contraction sur  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$ .*

*Démonstration.* Voir annexe A.3 pour la preuve.

L'idée principale est la suivante. On considère  $(W_1, \dots, W_N)$  et  $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)$  dans  $\prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i}$ .

En utilisant les hypothèses suivantes : régularité  $C^1$  de  $r, \mu, \lambda$ ;  $\rho_0 \in L^\infty(0, 1)$ ,  $\omega_i \in L^\infty(0, 1)$  et Lipschitz  $\forall i$ , on majore  $\sum_{i=1}^N |F_i(W_1, \dots, W_N)(t) - F_i(\bar{W}_1(t), \dots, \bar{W}_N)|_{\infty, [0, \delta]}$  par un terme de la forme

$C(t) \sum_{j=1}^N \|W_j - \bar{W}_j\|_{\infty, [0, \delta]}$  où  $C$  est fonction des données et vérifie  $C(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ . On choisit alors  $\delta$  assez petit pour que  $\forall t \leq \delta$ ,  $C(t) \leq \frac{1}{2} < 1$ .  $\square$

On arrive maintenant à la proposition clé.

**Proposition 4.10.** *Pour  $\delta$  fixé assez petit (i.e.  $\delta$  qui vérifie (36)), il existe un unique  $(W_1, \dots, W_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  tel que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , on ait :*

$$\begin{aligned} W_i(t) &= \int_0^t r(u, (W_j(u))_{n_1+n_2 < j \leq N}) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_{n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2}, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\ &\quad + \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{1 \leq j \leq n_1}, \xi_1(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_0^t \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu(W_j(\theta))_{n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2}, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour  $\delta$  qui vérifie (36),  $F$  est contractante (proposition 4.9) de  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  dans

lui-même (proposition 4.8). Or cet espace est complet comme produit fini d'espace complets (proposition 4.6), donc d'après le théorème du point fixe de Banach, l'application  $F$  admet un unique point fixe  $(W_1, \dots, W_N)$ .  $\square$

Maintenant que l'existence-unicité de  $(W_1, \dots, W_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  vérifiant les bonnes égalités est démontrée, il nous reste à montrer que notre candidat, défini à l'aide de ces  $W_i$ , est bien l'unique solution locale de notre problème.

La proposition suivante va nous être utile pour démontrer le théorème d'existence.

**Proposition 4.11.** *On considère  $\delta$  qui vérifie (36). Soient  $(W_1, \dots, W_N)$  l'unique point fixe de l'application  $F$  sur  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  (voir proposition 4.10). Alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $W_i$  est lipschitzienne sur  $[0, \delta]$ .*

*Démonstration.* preuve en annexe A.4.

L'idée est la suivante : On part de l'égalité donnée par la proposition 4.10. Les majorations se font bien grâce aux hypothèses de régularité sur  $r, \lambda$  et  $\mu$ , et à l'hypothèse  $\omega_i$  bornée et lipschitzienne pour tout  $i$ .  $\square$

On peut à présent énoncer le théorème d'existence d'une solution faible locale (en temps) de notre problème.



**Théorème 4.2** (Existence locale). *On considère  $\delta$  qui vérifie (36). Soient  $(W_1, \dots, W_N)$  l'unique point fixe de l'application  $F$  sur  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  (voir proposition 4.10). La fonction  $\rho$  définie comme suit sur  $[0, \delta] \times [0, 1]$  est une solution faible de notre problème.*

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_{\alpha}^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} & 0 \leq x \leq \xi_2(t), 0 \leq t \leq \delta \\ \rho(t, x) = \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta}, & \xi_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \delta \end{cases} \quad (13)$$

avec  $\alpha = \alpha(t, x)$ ,  $\beta = \beta(t, x)$ ,  $\xi_3(\theta) = \xi_3(\theta; t, x)$  et  $\xi_4(\theta) = \xi_4(\theta; t, x)$ . De plus,  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$  pour tout  $p \in [1, \infty)$ .

*Démonstration.* voir en annexe A.5.

L'idée est la suivante :

1. On montre que  $\rho \in L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  directement à partir de (13) et des hypothèses sur  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $r$ ,  $\rho_0$  (voir majoration (39))
2. On montre que  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$  (i.e. vérifie :  $\forall t \geq \tilde{t} \in [0, \delta]$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ ,  $\|\rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot)\|_{L^p(0,1)} \xrightarrow{|\tilde{t}-t| \rightarrow 0} 0$  (40)). Afin de pouvoir utiliser correctement la formule analytique (13) de la solution, on sépare la preuve en 3 morceaux :

(a) On montre  $\|\rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot)\|_{L^p(0, \xi_2(t))} \xrightarrow{|\tilde{t}-t| \rightarrow 0} 0$  (41). On a notamment besoin de la proposition 4.11, et d'approcher  $\lambda_x$  par des fonctions  $C^1$ . Pour conclure, le point clé est de montrer que  $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leq C |\tilde{t} - t|$  (voir figure 18) avec des raisonnements sur les courbes caractéristiques.

(b) On montre  $\|\rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot)\|_{L^p(\xi_2(\tilde{t}), 1)} \xrightarrow{|\tilde{t}-t| \rightarrow 0} 0$  (42). On a encore besoin de la proposition 4.11, et d'approcher  $\rho_0$  par des fonctions  $C^1$ . Pour conclure, on montre que  $|\tilde{\beta} - \beta| \leq C |\tilde{t} - t|$  (voir figure 18) avec des raisonnements sur les courbes caractéristiques.

(c) On montre  $\|\rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot)\|_{L^p(\xi_2(t), \xi_2(\tilde{t}))} \xrightarrow{|\tilde{t}-t| \rightarrow 0} 0$  (43). On utilise principalement le résultat  $\rho \in L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$ , et que  $|\xi_2(\tilde{t}) - \xi_2(t)| \leq C |\tilde{t} - t|$  (voir figure 18).

3. Enfin, on montre que  $\rho$  vérifie la formulation faible. Pour cela, on montre d'abord que les  $(W_i)_i$  point fixe de  $F$  vérifient bien  $W_i(t) = \int_0^1 \rho(t, \cdot) \omega_i$  en utilisant la proposition 4.4. Ensuite, avec (13) et en intervertissant le sens d'intégration avec le théorème de Fubini, on montre que  $\rho$  vérifie bien (6).

□

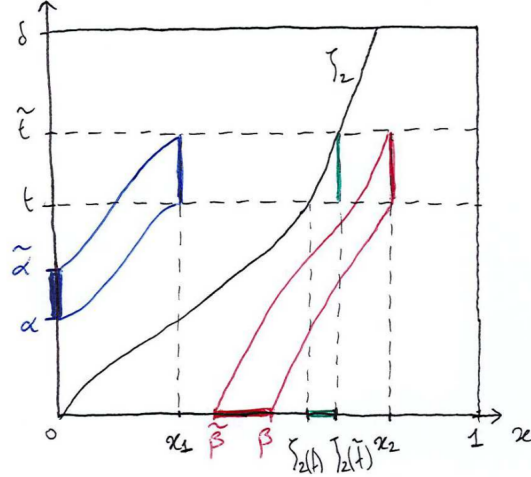


FIGURE 18 : Schéma pour illustrer la preuve de  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$  dans le théorème 4.2. On a représenté  $t \leq \tilde{t}$  dans  $[0, \delta]$ ,  $\alpha := \alpha(t, x_1)$ ,  $\tilde{\alpha} := \alpha(\tilde{t}, x_1)$ , où  $x_1 \in [0, \xi_2(t)]$ , et  $\beta := \beta(t, x_2)$ ,  $\tilde{\beta} := \beta(\tilde{t}, x_2)$  où  $x_2 \in [\xi_2(\tilde{t}), 1]$ . Pour montrer que  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ , on montre que les intervalles bleu, rouge et vert tendent vers 0 lorsque  $|\tilde{t} - t| \rightarrow 0$ .

On va à présent chercher à montrer l'unicité de la solution faible locale. Pour cela, on aura notamment besoin de la proposition suivante.

**Proposition 4.12.** *Soit  $T > 0$ . Soit  $\rho \in C^0([0, T]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, T) \times (0, 1))$  solution faible de notre problème (voir définition 4.1). Alors,  $\forall \tau \in [0, T]$  et  $\forall \varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que*

*$\varphi(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ , on a :*

$$\int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt + \int_0^\tau r(t, (W_j(t))_j) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx - \int_0^1 \rho(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx = 0$$

*Démonstration.* voir en annexe A.6, la preuve est basée sur celle du lemme 2.2. de l'article [6]. □

Par rapport à la définition 4.1 de solution faible, on retire l'hypothèse  $\varphi(\tau, x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . En contrepartie, le terme  $-\int_0^1 \rho(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx$  apparaît dans la formulation variationnelle. Notons que si  $\rho$  vérifie la proposition 4.12, alors il est clair que  $\rho$  est une solution faible. On a donc équivalence entre les deux formulations.

**Théorème 4.3** (Unicité locale). *On considère  $\delta$  qui vérifie (36). La solution faible  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  de notre problème est unique.*

*Démonstration.* voir la preuve en annexe A.7.

L'idée est la suivante :

1. On montre que si on a une autre solution faible  $\bar{\rho}$ , alors elle appartient à  $C^0([0, \delta]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  et elle vérifie la formule analytique attendue (47) (similaire à celle vérifiée par la solution  $\rho$ ). Pour montrer cela, la clé est de considérer le problème dual (45) et d'appliquer la proposition 4.12 en prenant pour  $\varphi$  la solution du problème dual.

2. À partir de (47), on montre avec la proposition 4.4 que les  $(\bar{W}_i)_i := (\int_0^1 \omega_i \bar{\rho})_i$  sont un point fixe de  $F$  dans  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  (l'appartenance des  $(\bar{W}_i)_i$  à cet ensemble n'est pas trivial, on a notamment besoin du lemme de Grönwall).
3. Par unicité du point fixe, les  $(\bar{W}_i)_i$  sont égaux aux  $(W_i)_i$ , donc les courbes caractéristiques sont aussi égales, et en remplaçant dans (47), on retrouve directement  $\bar{\rho} = \rho$ , ce qui conclue la preuve. □

Les théorèmes 4.2 et 4.3 donnent donc l'existence et l'unicité d'une solution faible  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  défini localement en temps, i.e. sur un intervalle de temps  $[0, \delta]$ , pour  $\delta$  qui vérifie (36). Il nous reste à étendre cette solution sur  $[0, T]$  tout entier. C'est l'objet du théorème 4.1 d'existence et unicité d'une solution faible globale. Le principe de la preuve est exposé ci-dessous :

*Principe de preuve du théorème 4.1.* voir la preuve détaillée en annexe A.8

L'idée de la preuve est la suivante :

1. Existence d'une solution vérifiant (10) : On itère sur l'intervalle temporel de définition de la solution. On a vu qu'on a existence d'une solution sur  $[0, \delta_0] \times [0, 1]$  avec  $\delta_0$  qui vérifie (36). En itérant, on veut montrer qu'on a existence sur  $[0, \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_m] \times [0, 1]$  avec  $\sum_{i=0}^m \delta_i = T$ . On procède donc par récurrence (cela fonctionne grâce au point 3). L'initialisation (existence d'une solution  $\rho$  sur  $[0, \delta_0] \times [0, 1]$ ) est donnée par le théorème d'existence locale.

Au rang  $n$ , on définit  $\tilde{\rho}_c$  (existe avec le théorème d'existence locale) solution faible de (49), qui est le problème (4) sur  $[0, \delta_{n+1}] \times [0, 1]$  avec comme condition initiale  $\tilde{\rho}_c(0, \bullet) = \rho(\delta_0 + \dots + \delta_n, \bullet)$ , et comme flux entrant  $r(\delta_0 + \dots + \delta_n + \bullet, (\tilde{W}_{c,i}(\bullet))_i)$  où  $\tilde{W}_{c,i}(t) = \int_0^1 \omega_i \tilde{\rho}_c(t, \cdot)$ .

Puis on prolonge naturellement  $\rho$  à l'aide de  $\tilde{\rho}_c$  en une fonction  $\bar{\rho}$  définie sur  $[0, \delta_0 + \dots + \delta_{n+1}] \times [0, 1]$  :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(t, \cdot) = \rho(t, \cdot) , & 0 \leq t \leq \tau \\ \bar{\rho}(t, \cdot) = \tilde{\rho}_c(t - \tau, \cdot) , & \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \end{cases}$$

On montre alors (dans l'idée ce n'est pas compliqué mais il y a beaucoup de jeux d'écritures et de notations) que  $\bar{\rho}$  est une solution faible sur  $[0, \delta_0 + \dots + \delta_{n+1}] \times [0, 1]$ , et que  $\bar{\rho}$  vérifie (10) pour  $t \leq \delta_0 + \dots + \delta_{n+1}$ .

2. Unicité : On procède aussi en itérant. On suppose qu'on a deux solutions faibles  $\rho^1$  et  $\rho^2$  sur  $[0, T] \times [0, 1]$ . Le théorème d'unicité locale donne  $\rho^1 \equiv \rho^2$  sur  $[0, \delta_0] \times [0, 1]$ . Pour  $t \geq \delta_0$ , on définit  $\rho_c^1(t - \delta_0, \cdot) := \rho^1(t, \cdot)$  et  $\rho_c^2(t - \delta_0, \cdot) := \rho^2(t, \cdot)$ . On montre alors que pour  $k \in \{1, 2\}$ ,  $\rho_c^k$  est solution faible sur  $[0, \delta_1] \times [0, 1]$  du même problème (62). Le théorème d'unicité locale donne alors  $\rho_c^1 \equiv \rho_c^2$ , et donc  $\rho^1 \equiv \rho^2$  sur  $[0, \delta_0 + \delta_1] \times [0, 1]$ . On peut itérer ce raisonnement, et on trouve  $\rho^1 \equiv \rho^2$  sur  $[0, \delta_0 + \dots + \delta_m] \times [0, 1]$ , d'où l'unicité globale.
3. Atteindre  $T$  : Il faut s'assurer qu'il existe bien un  $m$  tel que  $\sum_{i=0}^m \delta_i$  atteint  $T$ . Pour cela, on montre qu'on peut minorer les  $\delta_i$  par une constante indépendante de l'itération. Cette minoration peut être faite car  $\rho \in L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ . □

## 5 Problème stationnaire

On a vu dans la section 3.3 sur les données expérimentales qu'à l'échelle d'une ponte, la dynamique des ovocytes de petite et moyenne taille (comprise entre environ  $40\mu m$  et  $580\mu m$ ) peut être vue comme un problème stationnaire (car indépendante du temps de mesure). On va donc s'intéresser au problème stationnaire lié à notre modèle EDP.

Dans cette section, on considère le problème stationnaire correspondant à (4) avec un flux d'entrée  $r$  indépendant du temps mais dépendant de la densité d'ovocytes :

$$\begin{cases} 0 = -\partial_x (\lambda((\bar{W}_i)_{1 \leq i \leq n_1}, x) \bar{\rho}(x)) - \mu((\bar{W}_i)_{n_1+1 \leq i \leq n_1+n_2}, x) \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda((\bar{W}_i)_{1 \leq i \leq n_1}, x) \bar{\rho}(x) = r((\bar{W}_i)_{n_1+n_2 < i \leq n_1+n_2+n_3}) \end{cases} \quad (14)$$

avec  $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$  et  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\bar{W}_i = \int_0^1 \omega_i(y) \bar{\rho}(y) dy$  où  $\omega_i > 0 \in L^\infty(0, 1)$ . On peut réécrire ce problème sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\mu((W_i)_i, x) + \partial_x \lambda((W_i)_i, x)}{\lambda((W_i)_i, x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda((W_i)_i, x) \bar{\rho}(x) = r((W_i)_i) \end{cases} \quad (15)$$

**Definition 5.1** (Solution du problème stationnaire).  $\bar{\rho}$  est une solution du problème stationnaire si  $\bar{\rho} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$  et si  $\bar{\rho}$  vérifie (15), où  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\bar{W}_i = \int_0^1 \omega_i(y) \bar{\rho}(y) dy$ .

### 5.1 Existence-unicité pour des cas particuliers

Pour simplifier les notations, on définit les fonctions les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes, respectivement définis sur  $\mathbb{R}_+^{n_1+n_3} \times [0, 1]$  et  $\mathbb{R}_+^{n_1+n_2} \times [0, 1]$  :

$$f((W_i)_i, x) := \frac{r((W_i)_i)}{\lambda((W_i)_i, x)} \quad \text{et} \quad g((W_i)_i, x) := \int_0^x \frac{\mu((W_i)_i, y)}{\lambda((W_i)_i, y)} dy$$

Pour la suite, on se place dans le cadre suivant :

**Hypothèses sur  $f$  et  $g$  :**

- $f \in C^1(\mathbb{R}_+^{n_1+n_3} \times [0, 1], \mathbb{R}_+^*)$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}_+^{n_1+n_2} \times [0, 1], \mathbb{R}_+)$  (i)
  - $\exists M > 0$  tel que  $\forall (W_i)_i \in \mathbb{R}_+^{n_1+n_3}$ ,  $\|f((W_i)_i, \cdot)\|_{L^1(0,1)} \leq \frac{M}{\max_{j \in [0, N]} \|\omega_j\|_\infty}$  (ii)
- En particulier cette hypothèse est vérifiée si  $f$  est bornée.

**Proposition 5.1** (solution du problème linéaire). Soient  $(W_i)_{1 \leq i \leq N} \in (\mathbb{R}_+)^N$  fixés, avec  $N := n_1 + n_2 + n_3$ . Le problème (15) associé a pour solution  $\bar{\rho} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$  vérifiant :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{r((W_i)_i)}{\lambda((W_i)_i, x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu((W_i)_i, y)}{\lambda((W_i)_i, y)} dy}, \quad x \in [0, 1]$$

On va montrer l'existence d'une unique solution de (15) avec un argument de type point fixe, en s'inspirant de ce qu'on a fait pour montrer l'existence-unicité d'une solution faible de l'EDP.

**Definition 5.2** (application F). On définit l'application  $F: [0, M]^N \rightarrow [0, M]^N$  telle que :  
 $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall (W_i)_i \in [0, M]^N$ , alors :

$$F_j((W_i)_i) := \int_0^1 \omega_j(x) \frac{r(W_i)_i}{\lambda((W_i)_i, x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu((W_i)_i, y)}{\lambda((W_i)_i, y)} dy} dx = \int_0^1 \omega_j(x) f((W_i)_i, x) e^{-g((W_i)_i, x)} dx$$

**Remarque 5.1.** Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , et soit  $(W_i)_i \in [0, M]^N$ , on a :

$$|F_j((W_i)_i)| \leq \|\omega_j\|_\infty \int_0^1 |f((W_i)_i, x)| dx = \|\omega_j\|_\infty \|f((W_i)_i, \cdot)\|_{L^1(0,1)} \leq M$$

et il est clair (sous l'hypothèse (i)) que  $F_j((W_i)_i) \geq 0$ . Donc  $F$  est bien à valeur dans  $[0, M]^N$ .

Montrons que  $F$  est continue et même contractante sous certaines conditions (on ne considèrera pas les conditions les plus faibles par soucis de clarté et simplicité).

Soient  $(W_i)_i$  et  $(\bar{W}_i)_i$  dans  $[0, M]^N$ , et soit  $j \in [0, N]$ , alors :

$$\begin{aligned} |F_j((W_i)_i) - F_j((\bar{W}_i)_i)| &\leq \int_0^1 \omega_j(x) |f((W_i)_i, x) - f((\bar{W}_i)_i, x)| e^{-g((W_i)_i, x)} dx \\ &\quad + \int_0^1 \omega_j(x) f((\bar{W}_i)_i, x) |g((W_i)_i, x) - g((\bar{W}_i)_i, x)| dx \\ &\leq \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} \sum_i \|f_{W_i}\|_\infty |W_i - \bar{W}_i| + \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} \|f\|_\infty \sum_i \|g_{W_i}\|_\infty |W_i - \bar{W}_i| \\ &\leq \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} \left( \sum_{i=1}^{n_1} (\|f_{W_i}\| + \|f\| \|g_{W_i}\|) |W_i - \bar{W}_i| + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \|f\| \|g_{W_i}\| |W_i - \bar{W}_i| \right) \\ &\quad + \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} \sum_{i=n_1+n_2+1}^N \|f_{W_i}\| |W_i - \bar{W}_i| \end{aligned}$$

et en posant

$$C := \max_i (\|f_{W_i}\| + \|f\| \|g_{W_i}\|, \|f\| \|g_{W_i}\|, \|f_{W_i}\|) \quad (16)$$

$$|F_j((W_i)_i) - F_j((\bar{W}_i)_i)| \leq \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} C \sum_{i=1}^N |W_i - \bar{W}_i|$$

Donc

$$\sum_{j=1}^N |F_j((W_i)_i) - F_j((\bar{W}_i)_i)| \leq \sum_{j=1}^N C \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} \sum_{i=1}^N |W_i - \bar{W}_i|$$

$F$  est donc (uniformément) continue et en supposant  $\sum_{j=1}^N C \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} < 1$ ,  $F$  est même contractante. On a donc les deux propositions suivantes :

**Proposition 5.2.** *Sous les hypothèses énoncées en début de section sur  $f$  et  $g$ ,  $F$  admet un point fixe sur  $[0, M]^N$ .*

*Démonstration.*  $F$  est continue sur un convexe compact donc le théorème du point fixe de Brouwer donne directement l'existence d'un point fixe.  $\square$

**Proposition 5.3.** *Si de plus,  $F$  est contractante, alors  $F$  admet un unique point fixe dans  $[0, M]^N$ . En particulier, si  $C \sum_{j=1}^N \|\omega_j\|_{L^1(0,1)} < 1$  (avec  $C$  qui vérifie (16)) alors  $F$  admet un unique point fixe dans  $[0, M]^N$ .*

*Démonstration.*  $F$  est contractante sur  $[0, M]^N$ , qui est un espace complet car fermé de  $\mathbb{R}^N$ , qui est complet. Le théorème du point fixe de Banach garantie donc l'existence d'un unique point fixe de  $F$  dans  $[0, M]^N$ .  $\square$

On note  $(\bar{W}_j)_{j \in [1, N]}$  un point fixe de  $F$ , i.e.  $\forall j \in [1, N]$ ,

$$\bar{W}_j = \int_0^1 \omega_j(x) f((\bar{W}_i)_i, x) e^{-g((\bar{W}_i)_i, x)} dx$$

Le candidat à être une solution du problème stationnaire est :

$$\bar{\rho}(x) = f((\bar{W}_i)_i, x) e^{-g((\bar{W}_i)_i, x)} \text{ sur } [0, 1] \quad (17)$$

Comme attendu, on a le théorème suivant :

**Théorème 5.1** (Existence).  $\bar{\rho} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$  définie par (17) est solution du problème (15).

*Démonstration.* On se donne  $(\bar{W}_j)_{j \in [1, N]}$  un point fixe de  $F$ .  $f$  et  $g$  sont  $C^1$  par rapport à  $x$  et  $f$  à valeur dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $\bar{\rho} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ . De plus, on a directement  $\bar{W}_j = \int_0^1 \omega_j(x) \bar{\rho}(x) dx$ .

$$\bar{\rho}(0) = f((\bar{W}_i)_i, 0) = \frac{r((\bar{W}_i)_i)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, 0)} \text{ donc la condition initiale est respectée}$$

et soit  $x \in [0, 1]$ , alors :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'(x) &= -\frac{\lambda_x((\bar{W}_i)_i, x) r((\bar{W}_i)_i)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu((\bar{W}_i)_i, y)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, y)} dy} - \frac{\mu((\bar{W}_i)_i, x) r((\bar{W}_i)_i)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu((\bar{W}_i)_i, y)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, y)} dy} \\ &= -\frac{\mu((\bar{W}_i)_i, x) + \lambda_x((\bar{W}_i)_i, x)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, x)} \left[ \frac{r((\bar{W}_i)_i)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu((\bar{W}_i)_i, y)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, y)} dy} \right] \\ &= -\frac{\mu((\bar{W}_i)_i, x) + \lambda_x((\bar{W}_i)_i, x)}{\lambda((\bar{W}_i)_i, x)} \bar{\rho}(x) \end{aligned}$$

Donc  $\bar{\rho}$  est bien solution de (15).  $\square$

Montrons à présent le résultat suivant :

**Théorème 5.2** (Unicité). *Si  $F$  est contractante, alors la solution de (15) est unique.*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\rho} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$  une autre solution de (15), i.e. vérifie :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}'(x) = -\frac{\mu((\tilde{W}_i)_{i,x}) + \partial_x \lambda((\tilde{W}_i)_{i,x})}{\lambda((\tilde{W}_i)_{i,x})} \tilde{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \tilde{\rho}(x) = \frac{r((\tilde{W}_i)_i)}{\lambda((\tilde{W}_i)_{i,0})} > 0 \end{cases} \quad (18)$$

avec  $\tilde{W}_i = \int_0^1 \omega_i(x) \tilde{\rho}(x) dx$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

Soit  $x \in [0; 1]$ , alors  $\forall y \in [0, x]$ ,

$$\frac{\tilde{\rho}'(y)}{\tilde{\rho}(y)} = -\frac{\mu((\tilde{W}_i)_{i,y}) + \partial_x \lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})}{\lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})}$$

et en intégrant sur  $[0; x]$ , on trouve :

$$\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(0) e^{-\int_0^x \frac{\mu((\tilde{W}_i)_{i,y}) + \partial_x \lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})}{\lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})} dy}$$

Donc

$$\tilde{W}_j = \int_0^1 \omega_j(x) \tilde{\rho}(x) dx = \int_0^1 \omega_j(x) \tilde{\rho}(0) e^{-\int_0^x \frac{\mu((\tilde{W}_i)_{i,y}) + \partial_x \lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})}{\lambda((\tilde{W}_i)_{i,y})} dy} dx = F_j((\tilde{W}_i)_i), \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

et

$$\tilde{W}_j = F_j((\tilde{W}_i)_i) \leq \|\omega_j\|_\infty \left\| f((\tilde{W}_i)_i, \cdot) \right\|_{L^1(0,1)} \leq M$$

Donc par unicité du point fixe de Banach,  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\tilde{W}_j = \bar{W}_j$ , et en remplaçant directement dans l'expression de  $\tilde{\rho}$ , on trouve  $\tilde{\rho} \equiv \bar{\rho}$ , d'où l'unicité.  $\square$

À présent, nous allons préciser les conditions d'existence-unicité de solution dans plusieurs cas simple, pour lesquels on a parfois une solution analytique.

**Cas 1 :** On regarde l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\mu(x) + \lambda'(x)}{\lambda(x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \bar{\rho}(0) = \frac{r(\bar{W})}{\lambda(0)} \end{cases} \quad (19)$$

avec  $r(\bar{W}) = \frac{c_1}{1+c_2\bar{W}}$  et  $\bar{W} = \int_0^1 \omega(x) \bar{\rho}(x) dx$ , et où  $\mu \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  sont  $C^1$ .

**Proposition 5.4.** *Le problème (19) admet une unique solution donnée par :*

$$\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}(0)e^{-\int_0^x \frac{\mu(y)+\lambda'(y)}{\lambda(y)} dy}, \quad x \in [0, 1]$$

avec :

$$\bar{\rho}(0) = \frac{-\lambda(0) + \sqrt{\lambda(0)^2 + 4c_1c_2\lambda(0) \int_0^1 \omega(x)e^{-\int_0^x \frac{\mu+\lambda'}{\lambda}} dx}}{2c_2\lambda(0) \int_0^1 \omega(x)e^{-\int_0^x \frac{\mu+\lambda'}{\lambda}} dx} \quad (20)$$

*Démonstration.* Supposons que (19) admet une solution  $\bar{\rho}$ . Alors en intégrant, on a :

$$\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}(0)e^{-\int_0^x \frac{\mu(y)+\lambda'(y)}{\lambda(y)} dy}, \quad x \in [0, 1]$$

Et en remplaçant dans l'équation  $\bar{\rho}(0) = \frac{r(\bar{W})}{\lambda(0)}$ , on obtient directement :

$$\bar{\rho}(0)\lambda(0) = \frac{c_1}{1 + c_2\bar{\rho}(0) \int_0^1 \omega(x)e^{-\int_0^x \frac{\mu+\lambda'}{\lambda}} dx}$$

Or l'unique solution positive de cette équation est (20).

Réciproquement, si

$$\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}(0)e^{-\int_0^x \frac{\mu(y)+\lambda'(y)}{\lambda(y)} dy}, \quad x \in [0, 1]$$

avec  $\bar{\rho}(0)$  qui vérifie (20), alors  $\bar{\rho}$  est bien solution du problème (19), ce qui termine la preuve.  $\square$

**Cas 2 :** On regarde l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\mu(x)+\lambda'(x)}{\lambda(x)}\bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \bar{\rho}(0) = \frac{r(\bar{W}_1, \bar{W}_2)}{\lambda(0)} \end{cases} \quad (21)$$

avec  $r(\bar{W}_1, \bar{W}_2) = c_3 \frac{1+c_1\bar{W}_1}{1+c_2\bar{W}_2}$ , et  $\bar{W}_i = \int_0^1 \omega_i(x)\bar{\rho}(x)dx$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , et où  $\mu \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  sont  $C^1$ .

En faisant un raisonnement identique à celui fait dans le cas précédent, on arrive au résultat suivant :

**Proposition 5.5.** *Le problème (21) admet une unique solution donnée par :*

$$\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}(0)e^{-\int_0^x \frac{\mu(y)+\lambda'(y)}{\lambda(y)} dy}, \quad x \in [0, 1]$$

avec :

$$\bar{\rho}(0) = \frac{-\lambda(0) + c_1c_3\alpha_1 + \sqrt{[\lambda(0) - c_1c_3\alpha_1]^2 + 4c_2c_3\alpha_2\lambda(0)}}{2c_2\alpha_2\lambda(0)}$$

où  $\alpha_i = \int_0^1 \omega_i(x)e^{-\int_0^x \frac{\mu+\lambda'}{\lambda}} dx$  pour  $i \in \{1, 2\}$



**Cas 3 :** On considère l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\mu(\bar{W}_3, x) + \partial_x \lambda(\bar{W}_2, x)}{\lambda(\bar{W}_2, x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \bar{\rho}(0) = \frac{r(\bar{W}_1)}{\lambda(0)} \end{cases} \quad (22)$$

avec  $r(\bar{W}_1) = \frac{c_1}{1+c_2\bar{W}_1}$ ,  $\lambda(\bar{W}_2, x) = f_1(x) [1 + g_1(x)\bar{W}_2]$ ,  $\mu(\bar{W}_3, x) = f_2(x) [1 + g_2(x)\bar{W}_3]$  où  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ ,  $f_1 > 0$ , et  $\bar{W}_i = \int_0^1 \omega_i(x) \bar{\rho}(x) dx$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Les hypothèses (i) et (ii) sur  $f$  et  $g$  (voir début de la section 5.1) sont vérifiées.

De plus, avec un raisonnement identique à celui effectué dans le cas général, on peut montrer que  $F: [0, M]^3 \rightarrow [0, M]^3$  est contractante si la condition suivante est vérifiée :

$$c_1 \max \left( c_2 \int_0^1 \frac{\sum_i \omega_i}{f_1}, \int_0^1 \frac{\sum_i \omega_i}{f_1} \left[ g_1 + \int_0^x \frac{f_2 g_1 (1 + g_2 M)}{f_1} \right], \int_0^1 \frac{\sum_i \omega_i}{f_1} \int_0^x \frac{f_2 g_2}{f_1} \right) < 1 \quad (23)$$

avec  $M = c_1 \max_{i \in [1, 3]} \left( \int_0^1 \frac{\omega_i}{f_1} \right)$ . Les théorèmes 5.1 et 5.2 donnent directement le résultat suivant :

**Proposition 5.6.** *Le problème (22) admet une solution. De plus, si la condition (23) est vérifiée, alors cette solution est unique.*

Notons que dans ce cas, on a pas de formule analytique pour la solution.

**Cas 4 :** On considère à présent l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\partial_x \lambda(\bar{W}, x)}{\lambda(\bar{W}, x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \bar{\rho}(0) = \frac{r(\bar{W})}{\lambda(\bar{W}, 0)} \end{cases} \quad (24)$$

avec  $r(\bar{W}) = c(1 + \bar{W})$ ,  $\lambda(\bar{W}, x) = \frac{f_1(x)}{1+\bar{W}}$  et  $\bar{W} = \int_0^1 \omega \bar{\rho}$ , et où  $f_1 > 0$  est  $C^1$ . Notons que l'hypothèse (ii) sur  $f$  n'est pas vérifiée, on ne rentre donc pas dans le cadre des théorèmes 5.1 et 5.2 d'existence et d'unicité d'une solution. On va montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.7.** *Notons  $\alpha = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{f_1(x)} dx$ .*

- Si  $c \leq \frac{1}{4\alpha}$ , alors le problème (24) admet une unique solution donnée par :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1 - 2c\alpha + \sqrt{1 - 4c\alpha}}{2c\alpha f_1(x)}, \quad x \in [0, 1] \quad (25)$$

- Sinon, le problème (24) n'admet aucune solution.

*Démonstration.* Soit  $\bar{\rho}$  une solution du problème (24), que l'on peut réécrire ainsi :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \bar{\rho}(0) = \frac{c}{f_1(0)} (1 + W)^2 \end{cases}$$

L'EDO ne dépend donc pas de  $W$ . En intégrant, on obtient :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\bar{\rho}(0) f_1(0)}{f_1(x)}, \quad x \in [0, 1]$$

et en remplaçant dans l'expression de la condition initiale, on obtient directement :

$$\bar{\rho}(0)f_1(0) = c(1 + f_1(0)\bar{\rho}(0)\alpha)^2$$

$\bar{\rho}(0)$  est donc racine d'un polynôme de degré 2, dont le discriminant vaut  $\Delta = f_1(0)^2 [1 - 4c\alpha]$ . Si  $c > \frac{1}{4\alpha}$ , alors  $\Delta < 0$ . Le polynôme n'a pas de racine réelle, ce qui est absurde. Le problème (24) n'a donc pas de solution.

Si  $c \leq \frac{1}{4\alpha}$ , alors l'unique racine positive du polynôme est :

$$\bar{\rho}(0) = \frac{1 - 2c\alpha + \sqrt{1 - 4c\alpha}}{2c\alpha f_1(0)}$$

Donc  $\bar{\rho}(x) = \frac{\bar{\rho}(0)f_1(x)}{f_1(x)} = \frac{1 - 2c\alpha + \sqrt{1 - 4c\alpha}}{2c\alpha f(x)}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Réciproquement, on vérifie facilement que  $\bar{\rho}$  définit ainsi est bien une solution.  $\square$

**Remarque 5.2.** *On a simplifié au maximum les expressions de  $r$  et  $\lambda$  pour simplifier les calculs, mais on peut mener le même type de raisonnement en considérant par exemple  $r(\bar{W}_1) = c_4 \frac{1+c_1\bar{W}_1}{1+c_2\bar{W}_2}$  et  $\lambda(W_3, x) = \frac{f_1(x)}{1+c_3W_3}$ . On trouvera aussi des cas pour lesquels il n'y a pas de solution, en fonction du signe du discriminant du polynôme dont est racine  $\bar{\rho}(0)$ .*

## 5.2 Schéma numérique pour le problème stationnaire

### 5.2.1 Description du schéma

**Principe :**

Soient  $(W_1, \dots, W_N) \in \mathbb{R}_+^N$ , et soit  $\bar{\rho}(W)$  la solution (EDO linéaire d'ordre 1 avec condition de Cauchy donc admet une unique solution) associée de :

$$\begin{cases} \bar{\rho}'(x) = -\frac{\mu((W_i)_i, x) + \partial_x \lambda((W_i)_i, x)}{\lambda((W_i)_i, x)} \bar{\rho}(x), & x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda((W_i)_i, x) \bar{\rho}(x) = r((W_i)_i) \end{cases} \quad (26)$$

Posons  $J: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que :

$$J(W_1, \dots, W_N) = \sum_{i=1}^N \left| \int_0^1 \omega_i(x) \bar{\rho}(W)(x) dx - W_i \right|^2$$

Supposons que notre problème stationnaire a une unique solution.  $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N) =: \bar{W}$  est un minimum de  $J$  ssi  $\forall j \in [1, \dots, N]$ ,  $\int_0^1 \omega_j(x) \bar{\rho}(\bar{W})(x) dx = \bar{W}_j$  ssi  $\bar{\rho}(\bar{W})$  est la solution du problème stationnaire.

Plus généralement,  $J$  a  $n$  racines ssi on a existence de  $n$  solutions de (15).  $J$  n'a aucune racine ssi le minimum de  $J$  est strictement positif ssi (15) n'a aucune solution.

On va donc chercher à minimiser  $J$ . Pour minimiser  $J$ , du fait de la régularité des données, on peut utiliser un algorithme à direction de descente (méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno par exemple). En effet, montrons que  $J$  est différentiable.

**Différentiabilité de  $J$  :**

On suppose  $r \in C^1([0, +\infty)^{n_3} \times [0, 1])$ ,  $\lambda \in C^1([0, +\infty)^{n_1} \times [0, 1])$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu \in C^1([0, +\infty)^{n_2} \times [0, 1])$ ,  $\mu \geq 0$ .

Pour simplifier les notations, on pose :  $f(W) := \frac{r((W_i)_i)}{\lambda((W_i)_i, 0)}$  et  $h(W, x) := -\frac{\mu((W_i)_i, x) + \partial_x \lambda((W_i)_i, x)}{\lambda((W_i)_i, x)}$

**Proposition 5.8.** *Sous les hypothèses précédentes,  $J$  est différentiable et  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,*

$$\frac{\partial J}{\partial W_j}(W) = 2 \sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - W_i \right) \left( \int_0^1 \omega_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W) - \delta_{ij} \right) \quad (27)$$

où  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$  vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W) = h(W) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W) + \frac{\partial h}{\partial W_j}(W) \bar{\rho}(W), & \text{sur } [0, 1] \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)(0) = \frac{\partial f}{\partial W_j}(W) \end{cases} \quad (28)$$

*Démonstration.* Soit  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ . On va d'abord montrer les deux points suivants :

i)  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$  existe et vérifie (28).

ii)  $\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W)$  existe et  $\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) = \int_0^1 \omega_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$

i) Soit  $a > 0$  et  $W \in [0, a]^N$ .  $\bar{\rho}(W)$  est la solution du problème (26), donc  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$\bar{\rho}(W)(x) = f(W) e^{\int_0^x h(W, y) dy} \quad (29)$$

Or d'après les hypothèses, il est clair que  $f$  et  $h$  sont dérivables en  $W_j$ . De plus,  $h$  est continue sur  $[0, a]^N \times [0, 1]$  compact, donc bornée. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres donne donc l'existence de  $\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 h(W, y) dy$  et

$$\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 h(W, y) dy = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial W_j}(W, y) dy$$

Donc, d'après (29),  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$  existe et on a :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)(x) = \frac{\partial f}{\partial W_j}(W) e^{\int_0^x h(W, y) dy} + f(W) \int_0^x \frac{\partial h}{\partial W_j}(W, y) dy e^{\int_0^x h(W, y) dy}, \quad x \in [0, 1] \quad (30)$$

On a montré ce résultat sur  $[0, a]^N$  pour tout  $a > 0$ . Il est donc valable sur  $[0, +\infty[^N$ . De plus, notons qu'à partir de (30) on peut vérifier aisément que  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$  vérifie (28).

ii) Soit  $a > 0$ . En appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on peut montrer à partir de (30) que  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}$  est continue sur  $[0, a]^N \times [0, 1]$  compact, et donc en particulier bornée. On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres pour montrer que  $\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W)$  existe et  $\frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) = \int_0^1 \omega_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W)$ . Encore une fois, on a montré ce résultat sur  $[0, a]^N$  pour tout  $a > 0$ . Il est donc valable sur  $[0, +\infty[^N$ .

Finalement, on déduit de ii) que  $J$  est différentiable et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial W_j}(W) &= 2 \sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - W_i \right) \frac{\partial}{\partial W_j} \left( \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - W_i \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - W_i \right) \left( \frac{\partial}{\partial W_j} \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - \delta_{ij} \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}(W) - W_i \right) \left( \int_0^1 \omega_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(W) - \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

□

### 5.2.2 Implémentation du schéma

On a implémenté le schéma numérique en langage Python. On détaille ici les outils (issus de bibliothèques Python) utilisés pour évaluer et minimiser  $J$ , et la façon de procéder.

Pour minimiser  $J$ , on utilise la fonction *minimize* du module *optimize* de la bibliothèque *SciPy*. Cette fonction nous permet d'appliquer la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) pour minimiser  $J$ . Pour utiliser cette méthode de minimisation, nous avons besoin de pouvoir évaluer numériquement  $J$  et  $\nabla J$  pour n'importe quel  $W \in \mathbb{R}_+^N$ . Nous allons détailler la façon avec laquelle nous évaluons ces fonctions.

Evaluation numérique de  $J(W)$  :

Soit  $W \in [0, +\infty[^N$ . On résout le système d'EDO linéaire suivant avec la fonction *odeint* du module *integrate* de la bibliothèque *SciPy* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\rho}}{dx}(x) = h(W, x)\bar{\rho}(x), \quad x \in [0, 1] \\ I'_i(x) = \omega_i(x)\bar{\rho}(x), \quad x \in [0, 1], \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \bar{\rho}(0) = f(W) \\ I_i(0) = 0, \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{array} \right. \quad (31)$$

On a un unique paramètre de discrétisation  $h$  qui est le pas de subdivision (que l'on choisit uniforme) de l'intervalle  $[0, 1]$  utilisé pour résoudre le système d'EDO. En sortie de la résolution de ce système, on récupère les valeurs approchées  $I_{i,h}(1)$  des  $I_i(1) = \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}$ . Finalement, la valeur approchée numériquement de  $J(W)$  est donnée par :

$$J_h(W) = \sum_{i=1}^N (I_{i,h}(1) - W_i)^2$$

Evaluation numérique de  $\nabla J(W)$  :

On résout avec *odeint* le système d'EDO linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\rho}}{dx}(x) = h(W, x)\bar{\rho}(x), \quad x \in [0, 1] \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(x) = h(W, x) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(x) + \frac{\partial h}{\partial W_j}(W, x)\bar{\rho}(x), \quad x \in [0, 1] \\ I'_i(x) = \omega_i(x)\bar{\rho}(x), \quad x \in [0, 1], \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ J'_{ij}(x) = \omega_i(x) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ \bar{\rho}(0) = f(W) \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}(0) = \frac{\partial f}{\partial W_j}(W) \\ I_i(0) = 0, \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ J_{ij}(0) = 0, \quad (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \end{array} \right. \quad (32)$$

En sortie, on récupère les valeurs approchées  $I_{i,h}(1)$  des  $I_i(1) = \int_0^1 \omega_i \bar{\rho}$  et les valeurs approchées  $J_{ij,h}(1)$  des  $J_{ij}(1) = \int_0^1 \omega_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial W_j}$ . Finalement, la valeur approchée numériquement des  $\frac{\partial J}{\partial W_j}(W)$  est donnée par :

$$\left( \frac{\partial J}{\partial W_j} \right)_h (W) = 2 \sum_{i=1}^N (I_{i,h}(1) - W_i) (J_{ij,h}(1) - \delta_{ij})$$

On pourrait par exemple utiliser les méthodes RK45 ou DOP853 (méthodes de Runge-Kutta) qui sont aussi disponibles dans le module `Scipy.integrate`, mais (pour l'instant du moins), la vitesse de calcul et la précision de la méthode est largement suffisante.

### 5.2.3 Tests et validation du schéma

On va tester le schéma sur les quatre cas détaillés précédemment dans la section sur l'existence-unicité de solutions au problème stationnaire. Pour les deux premiers cas, on a une solution analytique connue. Pour le troisième cas, on a existence d'une solution et on a une condition qui assure l'unicité. Enfin, pour le dernier cas, on a une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution.

Dans toute cette partie, on notera  $E$  l'erreur relative en norme 2 entre la solution exacte  $\bar{\rho}_{ex}$  et la solution approchée  $\bar{\rho}_h = \bar{\rho}(\bar{W}_h)$ , où  $\bar{W}_h$  est l'approximation numérique du minimum de la fonctionnelle  $J$  :

$$E := \frac{\int_0^1 (\bar{\rho}_{ex} - \bar{\rho}_h)^2}{\int_0^1 \bar{\rho}_{ex}^2}$$

#### Cas 1 :

Données : Pour pouvoir calculer la solution exacte sans approximation (pas d'intégrales ou d'exponentielles à approcher), on se place dans un cas très simple. On pose  $\mu \equiv 0$ ,  $\lambda = \frac{1}{x+1}$ ,  $\omega \equiv 1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ . Ainsi la solution exacte vaut  $\bar{\rho}_{ex} = (x+1)^{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}}$ .

Paramètres de l'algorithme : On choisit arbitrairement d'initialiser l'algo de minimisation à  $W_0 = 1$ , et on fixe le critère d'arrêt `gtol` (valeur maximale de la norme du gradient pour laquelle on arrête l'algo) à  $10^{-10}$ .

Résultats : La courbe de convergence suivante (voir figure 19) montre que le schéma numérique converge et est d'ordre 2 (dans ce cas précis). Ceci est directement lié à l'ordre de la méthode odeint. De plus, dans ce cas précis, pour tous les pas de discrétisations  $h$  testés, l'algorithme de descente BFGS fait 5 itérations, pour 7 évaluations de  $J$  et 7 évaluations de  $\nabla J$ . Concernant le temps d'exécution de l'algorithme, on observe une convergence très rapide d'un ordre proche de  $-17$  (dans ce cas précis), c'est à dire que si on multiplie par 10 le temps de calcul, l'erreur est divisée par  $10^{17}$  (voir figure 19).

Dans le cas 1, la fonctionnelle à minimiser est définie sur  $\mathbb{R}$ , elle est facile à minimiser et on

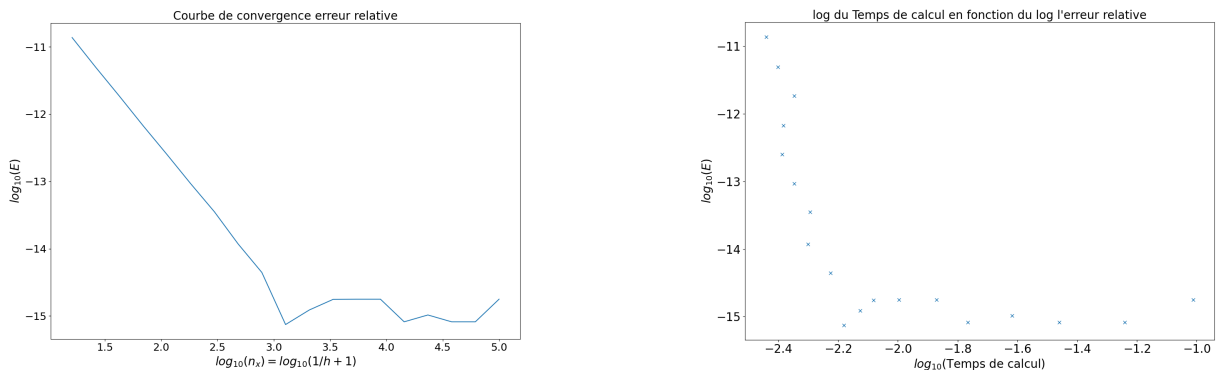


FIGURE 19 : Cas 1 avec  $\mu \equiv 0$ ,  $\lambda = \frac{1}{x+1}$ ,  $\omega \equiv 1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ . À gauche, courbe de convergence du schéma numérique pour le problème stationnaire. À droite, courbe du  $\log_{10}$  de l'erreur en fonction du  $\log_{10}$  du temps de calcul (en secondes) de l'algorithme BFGS (moyenne sur 500 tests).

peut même la minimiser rapidement "à la main", sans utiliser d'algorithme d'optimisation. On va donc s'intéresser au cas 2, pour lequel la fonctionnelle est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Cas 2 :**

Données : Comme précédemment, pour pouvoir calculer la solution exacte sans approximations, on se place dans un cas simple. On pose  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \frac{1}{x+1}$ ,  $\omega_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$ ,  $\omega_2 = \mathbb{1}_{[0,0.5]}$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = c_3 = 1$ . Ainsi, on peut calculer la solution exacte à partir de la proposition 21 :

$$\bar{\rho}_{ex} = \frac{4}{5} \left( 2 + \sqrt{13/2} \right) (x + 1).$$

Paramètre de l'algorithme : On choisit arbitrairement d'initialiser l'algo de minimisation à  $W_0 = (1, 1)$ , et on fixe le critère d'arrêt gtol (valeur maximale de la norme du gradient pour laquelle on arrête l'algo) à  $10^{-10}$  (on trouve des résultats similaires pour un critère d'arrêt plus petit).

Résultats : On peut voir sur la figure 20 (panels du haut) que l'erreur relative  $E$  est globalement comprise entre  $10^{-7}$  et  $10^{-8}$  pour tous les pas de discrétisation de  $[0, 1]$ . L'algorithme d'optimisation ne permet pas d'être plus précis que cela. Lorsque l'on trace la fonctionnelle (voir panels du bas de la figure 20), on voit un "plateau" autour du minimum qui complique sûrement la tâche de l'algorithme d'optimisation.

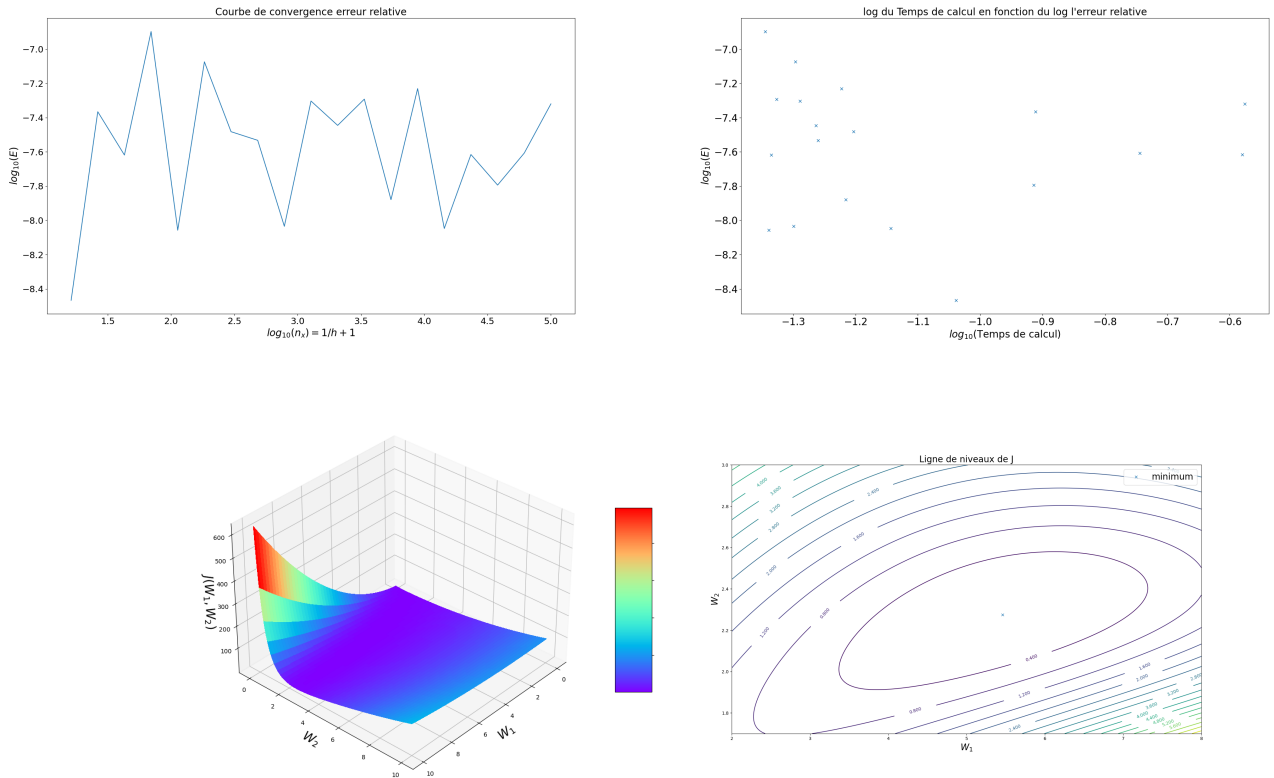


FIGURE 20 : Cas 2 avec  $\mu \equiv 0$ ,  $\lambda = \frac{1}{x+1}$ ,  $\omega_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$ ,  $\omega_2 = \mathbb{1}_{[0,0.5]}$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = c_3 = 1$ . En haut à gauche, courbe de convergence du schéma numérique pour le problème stationnaire. En haut à droite, courbe du  $\log_{10}$  de l'erreur en fonction du  $\log_{10}$  du temps de calcul (en secondes) de l'algorithme BFGS (moyenne sur 50 tests). En bas à gauche, courbe de la fonctionnelle  $J$  sur  $[0, 10] \times [0, 10]$  (le minimum est en  $(5.46, 2.27)$ ). En bas à droite, courbe des isovaleurs de  $J$  aux alentours du minimum.

**Cas 3 :** Dans ce cas on a pas de solution analytique mais on sait qu'on a existence et unicité d'une solution (si on respecte la condition de contractibilité). La plus-value de ce cas par rapport aux précédents est qu'on a une régulation sur les trois termes de notre EDO  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , et la fonctionnelle  $J$  est définie sur  $\mathbb{R}^3$ .

Données : On pose  $\lambda(x) = f_1(x)(1 + (0.2x + 1)W_2)$ ,  $\mu(x) = 0.5(1 + W_3)$ ,  $r(x) = \frac{c_1}{1+W_1}$ , on choisit  $c_1$  de façon à ce que (23) soit vraie ( $c_1 \simeq 0.22$ ), et  $f_1(x) = 100(x - 0.005)(x - 0.2)(x - 0.8)^2 + 1$ . On pose  $\omega_1(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ ,  $\omega_2(x) = \mathbb{1}_{[0,0.5]}$ ,  $\omega_3(x) = \mathbb{1}_{[0.5,1]}$ .

Paramètre de l'algorithme : On choisit arbitrairement d'initialiser l'algo de minimisation à  $W_0 = (M/2, M/2, M/2)$ , et on fixe le critère d'arrêt  $gtol$  à  $10^{-10}$ .

Paramètre de discrétisation : On veut choisir une discrétisation assez fine pour bien approcher la solution mais assez grossière pour ne pas faire de calculs inutiles. Pour cela, on compare les valeurs des  $\frac{J_{\tilde{h}}(\bar{W}_h)}{\|\bar{W}_h\|_2^2}$  pour différents  $h$ , et où  $J_{\tilde{h}}$  est l'approximation de la fonctionnelle  $J$  pour un pas  $\tilde{h}$  assez fin (inférieur aux valeurs de  $h$  que l'on teste). D'après la figure 21 (partie gauche), il semble suffisant de se contenter d'un pas  $h$  de l'ordre de  $10^{-1}$  (correspond à  $n_x = 11$ ), puisque le fait de raffiner la discrétisation ne fait pas diminuer significativement  $\frac{J_{\tilde{h}}(\bar{W}_h)}{\|\bar{W}_h\|_2^2}$ .

Résultats : Sur la figure 21 (partie droite) on a reporté la solution numérique trouvée, ainsi que la solution du même problème stationnaire sans rétro-actions.

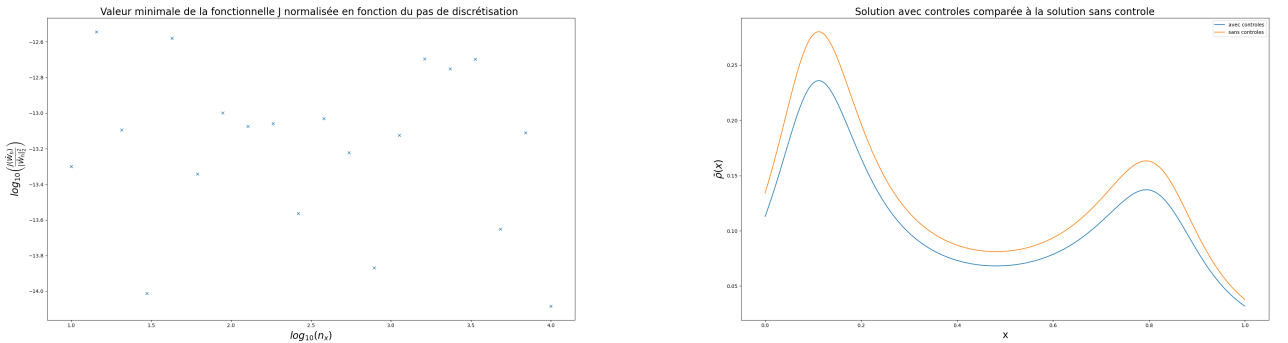


FIGURE 21 : Cas 3 avec  $\lambda(x) = f_1(x)(1 + (0.2x + 1)W_2)$ ,  $\mu(x) = 0.5(1 + W_3)$ ,  $r(x) = \frac{c_1}{1+W_1}$ ,  $c_1 \simeq 0.22$ ,  $f_1(x) = 100(x - 0.005)(x - 0.2)(x - 0.8)^2 + 1$ ,  $\omega_1(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ ,  $\omega_2(x) = \mathbb{1}_{[0,0.5]}$ ,  $\omega_3(x) = \mathbb{1}_{[0.5,1]}$ . À gauche, courbe des minimums de la fonctionnelle  $J$  (normalisée) en fonction de la finesse de la discrétisation choisie pour calculer  $J$  et  $\nabla J$  dans l'algorithme BFGS. À droite, courbe de la solution numérique obtenue (pour une discrétisation  $n_x = 10$ ) en bleu, et courbe de la solution sans rétro-contrôles en orange.

**Cas 4 :** On veut étudier le comportement de l'algorithme sur un cas où il n'y a pas de solutions. On va donc faire varier le paramètre  $c$  (flux d'entrée) pour tester les deux cas de la proposition 5.8.

Données : On fixe  $f_1(x) = 100(x - 0.005)(x - 0.2)(x - 0.8)^2 + 1$ , et  $\omega = \mathbb{1}_{[0.3,0.6]}$ .

Paramètres de l'algorithme : On fixe arbitrairement  $W_0 = 5$  et  $gtol = 10^{-10}$ .

Paramètre de discrétisation pour les évaluations de  $J$  et  $\nabla J$  : On fixe  $n_x = 10$

Résultats : On peut voir sur la figure 22 (graphique du haut) que la valeur minimale de la fonctionnelle normalisée  $\bar{W}_h \rightarrow \frac{J_{\tilde{h}}(\bar{W}_h)}{\|\bar{W}_h\|_2^2}$  est bien plus élevée lorsqu'on a aucune solution : on observe un bond de l'ordre de  $10^{-10}$  autour de  $c\alpha = 0.25$  (entre  $c\alpha = 0.2499$  et  $c\alpha = 0.2501$ ). De plus, on observe aussi (graphiques du bas sur la figure 22) qu'au voisinage de  $c = \frac{0.25}{\alpha}$ ,

l'erreur relative  $E$  augmente : l'algorithme est moins précis (la fonctionnelle est plus plate autour du minimum).

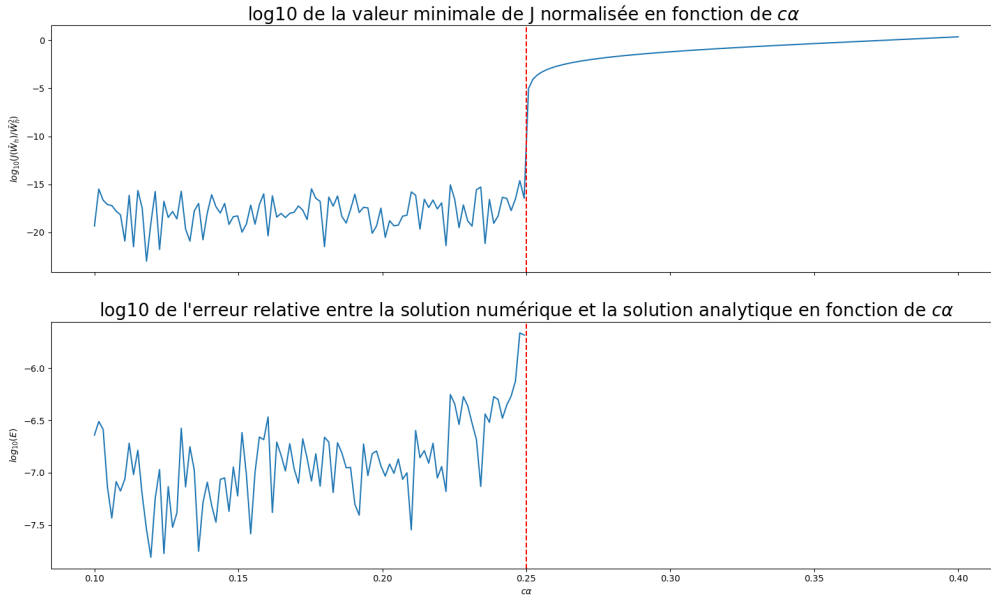


FIGURE 22 : Cas 4 avec  $f_1(x) = 100(x - 0.005)(x - 0.2)(x - 0.8)^2 + 1$  et  $\omega = \mathbb{1}_{[0.3, 0.6]}$ . En haut,  $\log_{10}\left(\frac{J_h(\bar{W}_h)}{\|\bar{W}_h\|_2}\right)$  en fonction de  $c\alpha$  pour  $c \in \left[\frac{0.1}{\alpha}, \frac{0.4}{\alpha}\right]$ . En bas,  $\log_{10}(E)$  en fonction de  $c\alpha$  pour  $c \in \left[\frac{0.1}{\alpha}, \frac{0.25}{\alpha}\right]$  (pour  $c\alpha > 0.25$  on a pas de solution).

### 5.3 Problème inverse du problème stationnaire

La mise en oeuvre d'un algorithme de résolution du problème stationnaire va nous permettre de résoudre le problème inverse associée aux données expérimentales dont l'on dispose. Cependant, avec les données expérimentales à notre disposition, le problème inverse est mal posé : on est loin d'avoir unicité des paramètres qui permettent au modèle de bien approcher les données. Commençons par le cas le plus simple, i.e. sans rétro contrôles dans notre modèle, et sans mortalité.

#### 5.3.1 Taux sans dépendance et pas de mortalité

Dans le cas où on omet les rétro-contrôles, on a une unique solution de (15) définie sur  $[0, 1]$  tout entier et définie par :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{r}{\lambda(0)} e^{-\int_0^x \frac{\mu(y) + \lambda'(y)}{\lambda(y)} dy} = \frac{r}{\lambda(x)} e^{-\int_0^x \frac{\mu(y)}{\lambda(y)} dy}, \quad x \in [0, 1] \quad (33)$$

et si on néglige la mortalité, ce qui n'est pas incohérent d'un point de vue hypothèse biologique, ( $\mu \equiv 0$ ), alors la forme de la solution est encore plus simple :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{r}{\lambda(x)}, \quad x \in [0, 1] \quad (34)$$



Notons  $\widehat{\rho}_i^j$  la distribution expérimentale des ovocytes de l'échantillon  $j$  du point de temps  $i$ , régularisée avec une méthode à noyau (KDE). En se basant sur (34), on note

$$\widehat{\lambda}_i^j(x) = \frac{\widehat{r}_i^j}{\widehat{\rho}_i^j(x)}, \quad x \in [40, 580] \quad (35)$$

On peut donc estimer les fonction taux de maturation pour chaque échantillon à un facteur multiplicatif près. On a tracé  $\frac{1}{\widehat{\rho}_i^j}$  sur  $[44.8, 580]$  (à gauche) et sur  $[44.8, 300]$  (à droite) pour tout  $i, j$  sur la figure 23.

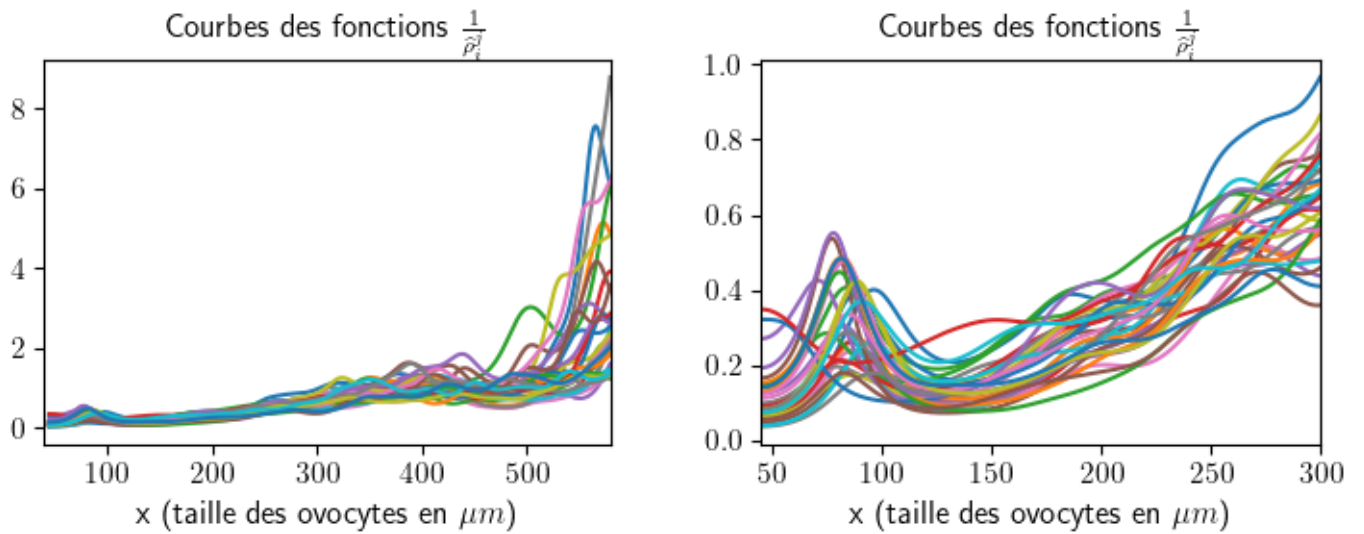


FIGURE 23 : À gauche,  $\frac{1}{\widehat{\rho}_i^j}$ , pour tout  $i, j$ , pour les ovocytes dans la classe de taille 44.8–580  $\mu m$ .

À droite, la même chose sur la classe de taille 44.8 – 300  $\mu m$ .

Paramètres des KDE : bandwidth  $h$  de Silverman divisée par 2, et noyau Gaussien.

## 6 Conclusion et perspectives

Ce stage a permis de développer, à partir des connaissances biologiques liées aux mécanismes de l'ovogenèse et des données du LPGP, un modèle de dynamique des populations ovocytaires des poissons modèles, que l'on peut voir comme une généralisation/variante du modèle EDP présenté dans [3] et adapté aux mammifères.

Mathématiquement, ce modèle correspond a une équation de transport non linéaire avec terme source, dont le terme de vitesse, le terme source et le flux d'entrée sont non-locaux. On a apporté une preuve d'existence-unicité d'une solution faible pour cette équation.

Dans un second temps, nous avons remarqué en analysant les données expérimentales du LPGP qu'à l'échelle d'une ponte, la dynamique des ovocytes de petite et moyenne taille (globalement jusqu'à la fin de la vitellogenèse) peut en fait être assimilée à un problème statique. Nous avons donc étudié mathématiquement (existence, unicité de solutions) le problème stationnaire associé au modèle EDP, et nous avons mis au point une méthode numérique de résolution de ce problème stationnaire.

Les perspectives à "court terme" de ces travaux sont naturellement d'étudier théoriquement la convergence du modèle EDP en temps long, et de mettre au point un schéma numérique pour le modèle EDP (en partant du schéma numérique développé dans [3] et [11]) qui converge en temps long vers l'état d'équilibre, et qui le préserve.

# A Preuves des propositions et théorèmes pour l'existence-unicité

## A.1 Preuve du lemme 4.4

*Démonstration.* On note :

$$\int_0^{\xi_2(t)} \frac{r(\alpha, (W_i(\alpha))_i)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy =: \star$$

$$\int_{\xi_2(t)}^1 \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy =: \star\star$$

Pour le premier terme, on fait le changement de variable  $u = \alpha_t(y)$ . On a donc (proposition 4.3) :

$$du = -\frac{1}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} dy$$

En ce qui concerne les bornes :

- $u(\xi_2(t)) = \alpha(t, \xi_2(t))$ . Or par définition de  $\alpha$  et par unicité des courbes caractéristiques avec la même condition initiale on a :  $0 = \xi_3(u(\xi_2(t)), t, \xi_2(t)) = \xi_2(u(\xi_2(t)))$ . Donc  $u(\xi_2(t)) = \xi_2^{-1}(0) = 0$  par définition de  $\xi_2$ .
- $u(0) = \alpha(t, 0)$ . Donc par définition de  $\alpha$  :  $0 = \xi_3(u(0); t, 0)$ . Or  $s \mapsto \xi_3(s; t, 0)$  est strictement croissante et  $\xi_3(t; t, 0) = 0$ , donc  $u(0) = t$ .

Donc finalement :

$$\star = -\int_t^0 r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta, t, \alpha_t^{-1}(u))) d\theta} \omega_i(\alpha_t^{-1}(u)) du$$

et en utilisant la proposition 3, on a

$$\star = \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; t, \xi_3(t; u, 0))) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du$$

et comme par unicité  $\xi_3(\theta; t, \xi_3(t; u, 0)) = \xi_3(\theta; u, 0)$ , on a finalement :

$$\star = \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du$$

Pour le second terme, on fait le changement de variable  $x = \beta_t(y)$ . On a donc (proposition 4.3) :

$$dx = e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} dy$$

En ce qui concerne les bornes :

- $x(\xi_2(t)) = \beta(t, \xi_2(t))$ . Or par définition  $\xi_4(0; t, \xi_2(t)) = \beta(t, \xi_2(t))$ , et par unicité des courbes caractéristiques  $\xi_4(0; t, \xi_2(t)) = \xi_2(0) = 0$ . Donc  $\beta(t, \xi_2(t)) = 0$ .
- $x(1) = \beta(t, 1) = \xi_4(0; t, 1) = \xi_1(0)$  par définitions.  
Or  $\xi_1(0) = \xi_1(t) - \int_0^t \xi_1'(\theta) d\theta$ .  
Donc  $x(1) = 1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta$ .

Donc finalement :

$$\star\star = \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; t, \beta_t^{-1}(x)))d\theta} \omega_i(\beta_t^{-1}(x)) dx$$

et en utilisant la proposition 4.2 et le fait que par unicité  $\xi_4(\theta; t, \xi_4(t; 0, x)) = \xi_4(\theta; 0, x)$ , on a :

$$\star\star = \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x))d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx$$

□

## A.2 Preuve de la proposition 4.7

*Démonstration.* Soit  $(W_1, \dots, W_N) \in \prod_{i=1}^N \Omega_{\delta, M_i}$ , et soit  $i \in \{1, \dots, N\}$  Pour simplifier les notations, posons

$$f(t, u) := r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0))d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0))$$

et

$$g(t, x) := \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x))d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x))$$

Ainsi on a

$$F_i(W_1, \dots, W_N)(t) = \int_0^t f(t, u) du + \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta} g(t, x) dx$$

Les fonctions que l'on intègre sont bornés (et mesurables) donc les intégrales sont bien définies. Montrons que  $F$  est bien à valeur dans  $(C^0([0, \delta]))^N$ .

Etape 1 :

Soit  $u \in [0, \delta]$ , montrons que  $f(\cdot, u)$  est continue sur  $[u, \delta]$ .

$t \mapsto \omega_i(\xi_3(t; u, 0))$  est continue comme composée de fonctions continues.

$t \mapsto \int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0))d\theta$  est continue car la fonction intégrée est bornée par  $\|\mu\|_{\infty, \prod_i [0, M_i] \times [0, 1]}$ , donc par composition avec  $\exp$  (continue) puis par produit de fonctions continues, on a bien que  $t \mapsto f(t, u)$  est continue.

On peut montrer de la même manière que  $t \mapsto g(t, x)$  est continue pour  $x \in [0; 1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta]$ .

Etape 2 :

Soit  $t \in [0, \delta]$  et  $t_n \rightarrow t$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Alors (on doit faire attention aux domaines de définition de  $f(t_n, \cdot)$ ,  $f(t, \cdot)$ ,  $g(t_n, \cdot)$  et  $g(t, \cdot)$  d'où la séparation de la preuve en 2 cas) :

Si  $t_n > t$  (avec  $t < \delta$ ) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_n} f(t_n, u) du - \int_0^t f(t, u) du \right| &= \left| \int_0^t (f(t_n, u) - f(t, u)) du + \int_t^{t_n} f(t_n, u) du \right| \\ &\leq |t_n - t| \|r\|_{\infty, [0, T] \times \prod [0, M_i]} \|\omega_i\|_{\infty} + \int_0^t |f(t_n, u) - f(t, u)| du \end{aligned}$$

et  $\forall n \in \mathbf{N}$ , on a  $|f(t_n, u)| \leq \|r\|_{\infty} \|\omega_i\|_{\infty}$  donc d'après le théorème de convergence dominée et par continuité de  $f(\cdot, u)$  on a :  $\int_0^t |f(t_n, u) - f(t, u)| du \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En passant à la limite dans l'inégalité précédente on obtient finalement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t_n} f(t_n, u) du = \int_0^t f(t, u) du$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t_n, x) dx - \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t, x) dx \right| \\
& \leq \int_0^{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} |g(t_n, x) - g(t, x)| dx + \int_{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta}^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t, x) dx \\
& \leq \int_0^1 \mathbb{1}_{[0, 1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta]}(x) |g(t_n, x) - g(t, x)| dx + \|\rho_0\|_\infty \|\omega_i\|_\infty |t_n - t| \|\lambda\|_{\infty, \prod_i [0, M_i] \times [0, 1]}
\end{aligned}$$

et  $\forall n \in \mathbf{N}$ , on a  $|g(t_n, x)| \leq \|\rho_0\| \|\omega_i\|$  donc d'après le théorème de convergence dominée (en utilisant la continuité de  $g(\cdot, x)$ ) on obtient que le terme de gauche tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Pour le terme de droite c'est clair. Donc en passant à la limite dans l'inégalité on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t_n, x) dx = \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t, x) dx$$

Finalement, on a bien que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_i(W_1, \dots, W_N)(t_n) = F_i(W_1, \dots, W_N)(t)$$

Si  $t_n < t$  (avec  $t > 0$ ) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{t_n} f(t_n, u) du - \int_0^t f(t, u) du \right| &= \left| \int_0^{t_n} (f(t_n, u) - f(t, u)) du + \int_t^{t_n} f(t, u) du \right| \\
&\leq |t_n - t| \|r\|_\infty \|\omega_i\|_\infty + \int_0^t \mathbb{1}_{[0, t_n]}(u) |f(t_n, u) - f(t, u)| du
\end{aligned}$$

et avec la même majoration que dans l'autre cas, on peut utiliser le théorème de convergence dominée. Donc en passant à la limite on obtient toujours que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t_n} f(t_n, u) du = \int_0^t f(t, u) du$$

Donc finalement le terme  $t \mapsto \int_0^t f(t, u) du$  est bien continu.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t_n, x) dx - \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t, x) dx \right| \\
& \leq \int_0^{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} |g(t_n, x) - g(t, x)| dx + \int_{1-\int_0^{t_n} \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta}^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} g(t_n, x) dx \\
& \leq \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{j,\xi_1}(\theta))d\theta} |g(t_n, x) - g(t, x)| dx + \|\rho_0\|_\infty \|\omega_i\|_\infty |t_n - t| \|\lambda\|_{\infty, \prod_i [0, M_i] \times [0, 1]}
\end{aligned}$$

de nouveau, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur le terme de gauche. Pour le terme de droite la convergence est claire. En passant à la limite, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} g(t_n, x) dx = \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} g(t, x) dx$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_i(W_1, \dots, W_N)(t_n) = F_i(W_1, \dots, W_N)(t)$$

Ceci est vrai pour tout  $t \in [0, \delta]$ , et pour toute suite  $t_n \rightarrow t$  qui converge par au-dessus ou par en-dessous, donc  $F_i(W_1, \dots, W_N)$  est bien continue sur  $[0, \delta]$ . L'application  $F$  est donc bien à valeur dans  $(C^0([0, \delta]))^N$ .  $\square$

### A.3 Preuve de la proposition 4.9

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ . Soit  $\delta > 0$  et qui vérifie (12).

Soient  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(W_1, \dots, W_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  et  $t \leq \delta$ . Pour simplifier les notations, on pose :

$$G_i(W_1, \dots, W_N)(t) = \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du$$

et

$$H_i(W_1, \dots, W_N)(t) = \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx$$

Soient  $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$ . On définit les courbes caractéristiques  $\bar{\xi}_i$  de manière analogue

aux  $\xi_i$  (définition 4.2 mais avec l'EDO :  $\frac{d\bar{\xi}_i}{ds}(s) = \lambda((\bar{W}_j(s))_{1 \leq j \leq n_1}, \bar{\xi}_i(s))$ ).

Considérons d'abord le terme  $G_i$  :

$$\begin{aligned} & |G_i(W_1, \dots, W_N)(t) - G_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)(t)| \\ & \leq \int_0^t |r(u, (W_j(u))_j) - r(u, (\bar{W}_j(u))_j)| e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du =: \clubsuit \\ & + \left| \int_0^t r(u, (\bar{W}_j(u))_j) \left( e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} - e^{-\int_u^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)) d\theta} \right) \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \right| =: \spadesuit \\ & + \left| \int_0^t r(u, (\bar{W}_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)) d\theta} (\omega_i(\xi_3(t; u, 0)) - \omega_i(\bar{\xi}_3(t; u, 0))) du \right| =: \diamond \end{aligned}$$

En utilisant notamment le caractère  $C^1$  de  $r$ , on a :

$$\begin{aligned} \clubsuit & \leq \|\omega_i\| \int_0^t |r(u, (W_j(u))_j) - r(u, (\bar{W}_j(u))_j)| du \\ & \leq \|\omega_i\| t \sum_{j=n_1+n_2+1}^N \|r_{W_j}\|_{\infty, [0, T] \times \prod_i [0, M_i]} \|W_j - \bar{W}_j\| \end{aligned}$$

Concernant le deuxième terme de la somme, on a :

$$\spadesuit \leq \|r\|_{\infty, [0, T] \times \prod_i [0, M_i]} \|\omega_i\|_{\infty, [0, 1]} \int_0^t \left| (e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} - e^{-\int_u^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)) d\theta}) \right| du$$

on utilise l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} &\leq \|r\| \|\omega_i\| \int_0^t \left| \int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta - \int_u^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)) d\theta \right| du \\ &\leq \|r\| \|\omega_i\| \int_0^t \int_u^t |(\mu(W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) - (\mu(\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0))| d\theta du \\ &\leq \|r\| \|\omega_i\| \left( \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \int_0^t \int_u^t \|W_j - \bar{W}_j\| d\theta du \right) \\ &\quad + \|r\| \|\omega_i\| \left( \|\mu_x\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \int_0^t \int_u^t |\xi_3(\theta; u, 0) - \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)| d\theta du \right) \end{aligned}$$

Or, soit  $t < \delta$ ,  $u \in [0, t]$ , et  $\theta \in [u, t]$ . Alors :

$$\begin{aligned} \xi_3(\theta; u, 0) &= \xi_3(u; u, 0) + \int_u^\theta \xi_3'(s; u, 0) ds \\ &= \int_u^\theta \lambda((W_j(s))_{1 \leq j \leq n_1}, \xi_3(s; u, 0)) ds \end{aligned}$$

et de la même manière,

$$\bar{\xi}_3(\theta; u, 0) = \int_u^\theta \lambda((\bar{W}_j(s))_{1 \leq j \leq n_1}, \bar{\xi}_3(s; u, 0)) ds, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} |\xi_3(\theta; u, 0) - \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)| &\leq \int_u^\theta |\lambda((W_j(s))_j, \xi_3(s; u, 0)) - \lambda((\bar{W}_j(s))_j, \bar{\xi}_3(s; u, 0))| ds \\ &\leq (\theta - u) \left( \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \|W_j - \bar{W}_j\| \right) \\ &\quad + (\theta - u) \left( \|\lambda_x\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \|\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0)\| \right) \\ &\leq t \left( \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \|W_j - \bar{W}_j\| \right) \\ &\quad + t \left( \|\lambda_x\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0, 1]} \|\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0)\| \right) \end{aligned}$$

Donc (en passant au sup) :

$$\|\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0)\| \leq t \left( \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + \|\lambda_x\| \|\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0)\| \right)$$

et donc :

$$\|\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0)\| \leq t \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|}$$

Finalement,

$$\spadesuit \leq \|r\| \|\omega_i\| \left( t^2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + t^3 \|\mu_x\| \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|} \right)$$

Enfin, concernant le terme  $\diamond$  :

$$\begin{aligned} \diamond &\leq \|r\| \int_0^t |(\omega_i(\xi_3(t; u, 0)) - \omega_i(\bar{\xi}_3(t; u, 0)))| \, du \\ &\leq \|r\| L_{\omega_i} \int_0^t |(\xi_3(t; u, 0) - \bar{\xi}_3(t; u, 0))| \, du \\ &\leq \|r\| L_{\omega_i} \int_0^t \|(\xi_3(\cdot; u, 0) - \bar{\xi}_3(\cdot; u, 0))\| \, du \\ &\leq \|r\| L_{\omega_i} t^2 \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|} \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant au terme  $H_i$ .

$$\begin{aligned} &|H_i(W_1, \dots, W_N)(t) - H_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)(t)| \\ &\leq \left| \int_{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta}^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta))d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x))d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \right| =: \bullet \\ &+ \left| \int_0^{1-\int_0^t \lambda((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_1(\theta))d\theta} \rho_0(x) \left( e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x))d\theta} - e^{-\int_0^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; 0, x))d\theta} \right) \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \right| =: * \\ &+ \left| \int_0^{1-\int_0^t \lambda((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_1(\theta))d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; 0, x))d\theta} (\omega_i(\xi_4(t; 0, x)) - \omega_i(\bar{\xi}_4(t; 0, x))) dx \right| =: * \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \bullet &\leq \|\omega_i\|_{\infty, [0,1]} \|\rho_0\|_{\infty, [0,1]} \left| \int_0^t \lambda((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_1(\theta)) - \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta \right| \\ &\leq t \|\omega_i\| \|\rho_0\| \left( \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + \|\lambda_x\| \|\xi_1 - \bar{\xi}_1\| \right) \end{aligned}$$

et on peut montrer (avec un raisonnement similaire au raisonnement mené précédemment sur  $\xi_3$ ) que :

$$\|\xi_1 - \bar{\xi}_1\| \leq t \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|}$$



Donc :

$$\bullet \leq t \|\omega_i\| \|\rho_0\| \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + \|\omega_i\| \|\rho_0\| \|\lambda_x\| t^2 \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} * &\leq \|\omega_i\| \|\rho_0\| \int_0^{1-\int_0^t \lambda(\bar{W}_1(\theta), \bar{W}_2(\theta), \bar{\xi}_1(\theta)) d\theta} \int_0^t |(\mu(W_j(\theta)))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) - \mu((\bar{W}_j(\theta)))_j, \bar{\xi}_4(\theta; 0, x))| d\theta dx \\ &\leq \|\omega_i\| \|\rho_0\| t \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| \\ &\quad + \|\omega_i\| \|\rho_0\| \|\mu_x\| \int_0^{1-\int_0^t \lambda(\bar{W}_1(\theta), \bar{W}_2(\theta), \bar{\xi}_1(\theta)) d\theta} \int_0^t \|\xi_4(\cdot; 0, x) - \bar{\xi}_4(\cdot; 0, x)\| d\theta dx \\ &\leq \|\omega_i\| \|\rho_0\| t \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| \\ &\quad + \|\omega_i\| \|\rho_0\| \|\mu_x\| \int_0^{1-\int_0^t \lambda(\bar{W}_1(\theta), \bar{W}_2(\theta), \bar{\xi}_1(\theta)) d\theta} \int_0^t t \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|} d\theta dx \\ &\leq \|\omega_i\| \|\rho_0\| t \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + \|\omega_i\| \|\rho_0\| \|\mu_x\| t^2 \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|} \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} * &\leq \|\rho_0\| L_{\omega_i} \int_0^{1-\int_0^t \lambda((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_1(\theta)) d\theta} \|\xi_4(\cdot; 0, x) - \bar{\xi}_4(\cdot; 0, x)\| dx \\ &\leq \|\rho_0\| L_{\omega_i} t \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\|}{1 - t \|\lambda_x\|} \end{aligned}$$

Donc pour conclure :

$$\begin{aligned} &|F_i(W_1, \dots, W_N)(t) - F_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)(t)| \\ &\leq \clubsuit + \spadesuit + \diamond + \bullet + * + * \\ &\leq \|\omega_i\| t \sum_{j=n_1+n_2+1}^N \|r_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| (t^2 \|r\| \|\omega_i\| + t \|\omega_i\| \|\rho_0\|) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| \left( \frac{t}{1 - t \|\lambda_x\|} (t^2 \|r\| \|\omega_i\| \|\mu_x\| + \|r\| L_{\omega_i} t + t \|\omega_i\| \|\rho_0\| (\|\mu_x\| + \|\lambda_x\|) + \|\rho_0\| L_{\omega_i}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\| \|W_j - \bar{W}_j\| t \|\omega_i\| \|\rho_0\| \end{aligned}$$

Si  $t \leq 1$  et  $t \leq \frac{1}{2\|\lambda_x\|}$ , on a donc :

$$\begin{aligned}
& |F_i(W_1, \dots, W_N)(t) - F_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)(t)| \\
& \leq \|\omega_i\| t \max_{n_1+n_2+1 \leq j \leq N} \|r_{W_j}\| \sum_{j=n_1+n_2+1}^N \|W_j - \bar{W}_j\| + t \|\omega_i\| (\|\rho_0\| + \|r\|) \max_{n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2} \|\mu_{W_j}\| \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \|W_j - \bar{W}_j\| \\
& + t \max_{1 \leq j \leq n_1} \|\lambda_{W_j}\| [2\|r\| (\|\omega_i\| \|\mu_x\| + L_{\omega_i}) + \|\omega_i\| \|\rho_0\| (2\|\mu_x\| + 2\|\lambda_x\| + 1) + \|\rho_0\| L_{\omega_i}] \sum_{j=1}^{n_1} \|W_j - \bar{W}_j\|
\end{aligned}$$

Donc si

$$\delta \leq \min\left(1, \frac{1}{2\|\lambda_x\|}, \frac{1}{2N \max_i \|\omega_i\| \max_j \|r_{W_j}\|}, \frac{1}{2 \max_j \|\mu_{W_j}\| N \max_i \|\omega_i\| (\|\rho_0\| + \|r\|)}, \frac{1}{2N \max_j \|\lambda_{W_j}\| (2\|r\| (\max_i \|\omega_i\| \|\mu_x\| + \max_i L_{\omega_i}) + \max_i \|\omega_i\| \|\rho_0\| (2\|\mu_x\| + 2\|\lambda_x\| + 1) + \|\rho_0\| \max_i L_{\omega_i})}\right)$$

alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall t \leq \delta$ , on a :

$$|F_i(W_1, \dots, W_N)(t) - F_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)(t)| \leq \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \|W_j - \bar{W}_j\|$$

et ainsi :

$$\sum_{i=1}^N \|F_i(W_1, \dots, W_N) - F_i(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N)\|_{\infty, [0, \delta]} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \|W_j - \bar{W}_j\|_{\infty, [0, \delta]}$$

Donc F est une contraction sur  $\prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$  pour

$$\delta = \min\left(T, \frac{1}{\|\lambda\|}, 1, \frac{1}{2\|\lambda_x\|}, \frac{1}{2N \max_i \|\omega_i\| \max_j \|r_{W_j}\|}, \frac{1}{2 \max_j \|\mu_{W_j}\| N \max_i \|\omega_i\| (\|\rho_0\| + \|r\|)}, \frac{1}{2N \max_j \|\lambda_{W_j}\| (2\|r\| (\max_i \|\omega_i\| \|\mu_x\| + \max_i L_{\omega_i}) + \max_i \|\omega_i\| \|\rho_0\| (2\|\mu_x\| + 2\|\lambda_x\| + 1) + \|\rho_0\| \max_i L_{\omega_i})}\right) \quad (36)$$

□

## A.4 Preuve de la proposition 4.11

*Démonstration.* Soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ , et soient  $t \leq \bar{t} \in [0, \delta]$ . On pose :

$$\begin{aligned}
F_i(t) & := \int_0^t r(u, (W_j(u))_{n_1+n_2 < j \leq N}) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_{n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2}, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\
G_i(t) & := \int_0^t \rho_0(x) e^{-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_{1 \leq j \leq n_1}, \xi_1(\theta)) d\theta} e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_{n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2}, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx
\end{aligned}$$

ainsi

$$|W_i(\bar{t}) - W_i(t)| = |F_i(\bar{t}) - F_i(t) + G_i(\bar{t}) - G_i(t)| \leq |F_i(\bar{t}) - F_i(t)| + |G_i(\bar{t}) - G_i(t)|$$

Or,

$$\begin{aligned}
|F_i(\bar{t}) - F_i(t)| &\leq \left| \int_t^{\bar{t}} r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^{\bar{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(\bar{t}; u, 0)) du \right| \\
&+ \left| \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) \left[ e^{-\int_u^{\bar{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} - e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \right] \omega_i(\xi_3(\bar{t}; u, 0)) du \right| \\
&+ \left| \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} [\omega_i(\xi_3(\bar{t}; u, 0)) - \omega_i(\xi_3(t; u, 0))] du \right| \\
&\leq |\bar{t} - t| \|r\|_\infty \|\omega_i\|_{\infty, [0,1]} + \|r\|_\infty \|\omega_i\|_\infty \int_0^t \left| \left( \int_u^{\bar{t}} - \int_u^t \right) \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta \right| du \\
&+ \|r\|_\infty \int_0^t |\omega_i(\xi_3(\bar{t}; u, 0)) - \omega_i(\xi_3(t; u, 0))| du \\
&\leq |\bar{t} - t| \|r\|_\infty \|\omega_i\|_\infty \left( 1 + \|\mu\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0,1]} \delta \right) + \|r\|_\infty L_{\omega_i} \int_0^t |\xi_3(\bar{t}; u, 0) - \xi_3(t; u, 0)| du
\end{aligned}$$

Or soit  $u \in [0, t]$ , alors :

$$\xi_3(\bar{t}; u, 0) - \xi_3(t; u, 0) = \int_t^{\bar{t}} \xi_3'(s; u, 0) ds = \int_t^{\bar{t}} \lambda((W_j(s))_j, \xi_3(s; u, 0)) ds$$

$$\text{donc } |\xi_3(\bar{t}; u, 0) - \xi_3(t; u, 0)| \leq |\bar{t} - t| \|\lambda\|_{\infty, \prod_j [0, M_j] \times [0,1]}$$

Donc finalement

$$|F_i(\bar{t}) - F_i(t)| \leq |\bar{t} - t| [\|r\| \|\omega_i\| + \|r\| \|\omega_i\| \|\mu\| \delta + \|r\| \|\lambda\| L_{\omega_i} \delta] \quad (37)$$

D'autre part, en posant  $f(s) := \xi_1(0; s, 1) = \beta(s, 1) = 1 - \int_0^s \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta, s, 1)) d\theta$ , on a :

$$\begin{aligned}
|G_i(\bar{t}) - G_i(t)| &\leq \left| \int_{f(t)}^{f(\bar{t})} \rho_0(x) e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(\bar{t}; 0, x)) dx \right| \\
&+ \left| \int_0^{f(t)} \rho_0(x) \left[ e^{-\int_0^{\bar{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} - e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \right] \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \right| \\
&+ \left| \int_0^{f(t)} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} [\omega_i(\xi_4(\bar{t}; 0, x)) - \omega_i(\xi_4(t; 0, x))] dx \right| \\
&\leq \|\rho_0\|_\infty \|\omega_i\| |f(\bar{t}) - f(t)| + \|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\mu\| |\bar{t} - t| + \|\rho_0\| L_{\omega_i} \int_0^{f(t)} |\xi_4(\bar{t}; 0, x) - \xi_4(t; 0, x)| dx
\end{aligned}$$

et avec un raisonnement similaire à celui fait sur  $\xi_3(\cdot; u, 0)$ , on a :

$$\leq \|\rho_0\| \|\omega_i\| |f(\bar{t}) - f(t)| + \|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\mu\| |\bar{t} - t| + \|\rho_0\| L_{\omega_i} \|\lambda\| |\bar{t} - t|$$

Or, en utilisant la proposition 4.3, on a :

$$|f(t) - f(\bar{t})| = |\beta(t, 1) - \beta(\bar{t}, 1)| \leq \left\| \frac{\partial \beta}{\partial t}(\cdot, 1) \right\|_{\infty, [0, T]} |\bar{t} - t| \leq \|\lambda\|_{\infty} e^{T\|\lambda_x\|_{\infty}} |\bar{t} - t|$$

Donc finalement :

$$|G_i(\bar{t}) - G_i(t)| \leq |\bar{t} - t| [\|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\lambda\|_{\infty} e^{T\|\lambda_x\|_{\infty}} + \|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\mu\| + \|\rho_0\| L_{\omega_i} \|\lambda\|] \quad (38)$$

et en utilisant (37) et (38), on a :

$$\begin{aligned} |W_i(\bar{t}) - W_i(t)| &\leq |\bar{t} - t| [\|r\| \|\omega_i\| + \|r\| \|\omega_i\| \|\mu\| \delta + \|r\| \|\lambda\| L_{\omega_i} \delta] \\ &\quad + |\bar{t} - t| [\|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\lambda\|_{\infty} e^{T\|\lambda_x\|_{\infty}} + \|\rho_0\| \|\omega_i\| \|\mu\| + \|\rho_0\| L_{\omega_i} \|\lambda\|] \end{aligned}$$

Donc  $W_i$  est lipschitzienne sur  $[0, \delta]$ . □

## A.5 Preuve du théorème 4.2 d'existence locale

*Démonstration.* Il faut :

- Montrer que  $\rho \in L^{\infty}((0, \delta) \times (0, 1))$
- Montrer que  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$
- Montrer que  $\rho$  vérifie la formulation faible

Montrons d'abord que la fonction  $\rho$  définie par (13) appartient bien à  $L^{\infty}((0, \delta) \times (0, 1))$ .

Notons

$$\bar{\lambda}((M_j)_j) := \inf_{(W_1, \dots, W_{n_1}, x) \in [0, M_1] \times \dots \times [0, M_{n_1}] \times [0, 1]} \lambda(W_1, \dots, W_{n_1}, x)$$

Remarquons que comme  $\lambda \in C^1([0, +\infty)^{n_1} \times [0, 1])$  et  $\lambda > 0$ , on a  $\bar{\lambda}((M_j)_j) > 0$ .

À partir de (13), on a clairement :

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^{\infty}((0, \delta) \times (0, 1))} &\leq e^{\delta\|\lambda_x\|_{\infty, \Pi_{j=1}^{n_1} [0, M_j] \times [0, 1]}} \max \left( \|\rho_0\|_{\infty}, \frac{\|r\|_{\infty, [0, \delta] \times \Pi_j [0, M_j]}}{\bar{\lambda}((M_j)_j)} \right) \\ &\leq e^{T\|\lambda_x\|_{\infty, \Pi_{j=1}^{n_1} [0, M_j] \times [0, 1]}} \max \left( \|\rho_0\|_{\infty}, \frac{\|r\|_{\infty, [0, T] \times \Pi_j [0, M_j]}}{\bar{\lambda}((M_j)_j)} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

À présent, montrons que  $\rho \in C^0([0, \delta]; L^p(0, 1))$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ .

Soient  $t, \tilde{t} \in [0, \delta]$ , avec  $\tilde{t} \geq t$ . On veut montrer que  $\forall p \in [1, \infty)$ , on a :

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(0, 1)} \xrightarrow{|\tilde{t} - t| \rightarrow 0} 0 \quad (40)$$

Pour simplifier les notations, on notera  $\tilde{\xi}_3(\theta) = \xi_3(\theta; \tilde{t}, x)$ ,  $\xi_3(\theta) = \xi_3(\theta; t, x)$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha(\tilde{t}, x)$ ,  $\alpha = \alpha(t, x)$ ,  $\tilde{\xi}_4(\theta) = \xi_4(\theta; \tilde{t}, x)$ ,  $\xi_4(\theta) = \xi_4(\theta; t, x)$ ,  $\tilde{\beta} = \beta(\tilde{t}, x)$ ,  $\beta = \beta(t, x)$ . De plus, pour simplifier, on notera parfois  $C$  les termes strictement positifs qui ne dépendent pas de  $\tilde{t}$ ,  $t$  et de  $x$ .

Soit  $x \in [0, \xi_2(t)]$ , alors d'après (13) :

$$\begin{aligned}
|\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)| &\leq \left| \frac{r(\tilde{\alpha}, (W_j(\tilde{\alpha}))_j) - r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\tilde{\alpha}))_j, 0)} \right| e^{-\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta} \\
&+ \left| \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\tilde{\alpha}))_j, 0)} - \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} \right| e^{-\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta} \\
&+ \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} \left| e^{-\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta} - e^{-\int_{\alpha}^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \right| \\
&\leq \frac{e^{\delta \|\lambda_x\|_{\infty}}}{\lambda^i} \left( \|r_t\|_{\infty} |\tilde{\alpha} - \alpha| + \sum_{j=n_1+n_2+1}^N \|r_{W_j}\|_{\infty} |W_j(\tilde{\alpha}) - W_j(\alpha)| \right) \\
&+ \frac{\|r\|_{\infty} e^{\delta \|\lambda_x\|_{\infty}}}{\lambda^i \times \lambda^i} \sum_{j=1}^{n_1} \|\lambda_{W_j}\|_{\infty} |W_j(\alpha) - W_j(\tilde{\alpha})| \\
&+ \frac{\|r\|_{\infty}}{\lambda^i} \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta - \int_{\alpha}^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ \frac{\|r\|_{\infty}}{\lambda^i} \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta - \int_{\alpha}^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right|
\end{aligned}$$

par des arguments de densité, on peut se donner  $(v_n)_{n \geq 0} \subset C^1(\prod_j [0, M_j] \times [0, 1])$  tel que  $v_n \xrightarrow{C^0(\prod_j [0, M_j] \times [0, 1])} \lambda_x$ . Pour simplifier, on notera parfois  $C_n$  les termes strictements positifs qui ne dépendent pas de  $\tilde{t}$ ,  $t$  et de  $x$  mais qui dépendent de  $n$ . Rappelons aussi que  $\forall j \in [1, N]$ ,  $W_j$

est lipschitzienne (proposition 4.11).

$$\begin{aligned}
|\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)| &\leq |\alpha - \tilde{\alpha}| + C \sum_{j=n_1+n_2+1}^N |\alpha - \tilde{\alpha}| + C \sum_{j=1}^{n_1} |\alpha - \tilde{\alpha}| \\
&+ C \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} (\lambda_x - v_n)((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta \right| + C \left| \int_{\alpha}^t (\lambda_x - v_n)((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ C \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} v_n((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta - \int_{\alpha}^t v_n((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ C \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) - \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ C \left| \left( \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} - \int_{\alpha}^t \right) \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&\leq C |\alpha - \tilde{\alpha}| \\
&+ C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty} + C \left| \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} v_n((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta - \int_{\alpha}^t v_n((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ C \left| \int_t^{\tilde{t}} v_n((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta \right| + C \left| \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} v_n((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&+ CT \|\mu_x\| \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]} + C \left| \int_t^{\tilde{t}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| + C \left| \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&\leq C |\alpha - \tilde{\alpha}| + C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty} \\
&+ C_n \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]} + C_n |\tilde{t} - t| + C \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]}
\end{aligned}$$

Or, soit  $s \in [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]$ .

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{\xi}_3(s) - \xi_3(s) \right| &= \left| \int_s^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta - \int_s^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&\leq C |t - \tilde{t}| + \delta \|\lambda_x\| \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]}
\end{aligned}$$

Comme  $\delta < \frac{1}{\|\lambda_x\|}$ , on a :

$$\left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]} \leq \frac{C}{1 - \delta \|\lambda_x\|} |t - \tilde{t}| \leq C |t - \tilde{t}|$$

et  $[\tilde{\alpha}, t] \subset [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]$  donc  $\left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, t]} \leq \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, \tilde{t}]} \leq C |t - \tilde{t}|$

Il reste à majorer  $|\tilde{\alpha} - \alpha|$ .

Par définition,  $\xi_3(t) = x = \tilde{\xi}_3(\tilde{t})$ , or :

$$\begin{aligned}
\xi_3(t) &= \int_{\alpha}^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_3(\tilde{t}) = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta \quad \text{donc :} \\
&\int_{\alpha}^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta - \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta = 0 \quad \text{et donc (Chasles) :} \\
&\int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta = \int_t^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta + \int_{\tilde{\alpha}}^t \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) - \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta
\end{aligned}$$

À présent, majorons  $|\tilde{\alpha} - \alpha|$  :

$$\begin{aligned}
|\tilde{\alpha} - \alpha| &= \left| \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} 1 d\theta \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \frac{\lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta))}{\inf_j \lambda} d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{\inf \lambda} \left| \int_t^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) d\theta + \int_{\tilde{\alpha}}^t \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_3(\theta)) - \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{\inf \lambda} \left( \|\lambda\| |\tilde{t} - t| + \delta \|\lambda_x\| \left\| \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \right\|_{\infty, [\tilde{\alpha}, t]} \right) \\
&\leq C |\tilde{t} - t|
\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout  $x \in [0, \xi_2(t)]$ , on a :

$$|\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)| \leq C_n |\tilde{t} - t| + C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty}$$

Donc

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(0, \xi_2(t))} \leq C_n |\tilde{t} - t| + C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty}$$

En choisissant  $n$  assez grand, et en utilisant la définitions de  $v_n$ , on en déduit facilement que :

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(0, \xi_2(t))} \xrightarrow{|\tilde{t} - t| \rightarrow 0} 0 \quad (41)$$

Maintenant, on considère  $x \in [\xi_2(\tilde{t}), 1]$ .

$$\begin{aligned}
|\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)| &\leq \left| \rho_0(\tilde{\beta}) \right| \left| e^{-\int_0^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) d\theta} - e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \right| \\
&\quad + \left| \rho_0(\tilde{\beta}) - \rho_0(\beta) \right| e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \\
&\leq \|\rho_0\|_{\infty, [0, 1]} \left| \int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) - \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta \right| \\
&\quad + \|\rho_0\|_{\infty, [0, 1]} \left| \int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) - \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta \right| \\
&\quad + \|\rho_0\|_{\infty, [0, 1]} \left| \int_t^{\tilde{t}} \lambda_x((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) d\theta \right| \\
&\quad + e^{\delta \|\lambda_x\|} \left| \rho_0(\tilde{\beta}) - \rho_0(\beta) \right| \\
&\leq C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty} + C_n \left\| \tilde{\xi}_4 - \xi_4 \right\|_{\infty, [0, t]} + C |\tilde{t} - t| + C \left| \rho_0(\tilde{\beta}) - \rho_0(\beta) \right| \\
&\leq C \|\lambda_x - v_n\| + C_n |\tilde{t} - t| + C \left| \rho_0(\tilde{\beta}) - \rho_0(\beta) \right| \quad (\text{même raisonnement que sur } \left\| \xi_3 - \tilde{\xi}_3 \right\|)
\end{aligned}$$

Comme  $C^1([0, 1])$  est dense dans  $L^p(0, 1)$  (et  $\rho_0 \in L^{\infty}(0, 1) \subset L^p(0, 1)$ ), on peut choisir  $(\rho_0^n)_{n \geq 0} \in C^1([0, 1])^{\mathbb{N}}$  tel que  $\rho_0^n \xrightarrow{L^p(0, 1)} \rho_0$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\left| \rho_0(\tilde{\beta}) - \rho_0(\beta) \right| &\leq \left| \rho_0^n(\tilde{\beta}) - \rho_0(\tilde{\beta}) \right| + \left| \rho_0^n(\tilde{\beta}) - \rho_0^n(\beta) \right| + \left| \rho_0^n(\beta) - \rho_0(\beta) \right| \\
&\leq \left| \rho_0^n(\tilde{\beta}) - \rho_0(\tilde{\beta}) \right| + C_n \left| \tilde{\beta} - \beta \right| + \left| \rho_0^n(\beta) - \rho_0(\beta) \right|
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |\tilde{\beta} - \beta| &= \left| \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta - \int_0^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \tilde{\xi}_4(\theta)) d\theta \right| \\ &\leq C \left\| \xi_4 - \tilde{\xi}_4 \right\|_{\infty, [0, t]} + C |\tilde{t} - t| \\ &\leq C |\tilde{t} - t| \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x \in [\xi_2(\tilde{t}), 1]$  :

$$|\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)| \leq C \|\lambda_x - v_n\|_{\infty} + C_n |\tilde{t} - t| + C \left| \rho_0^n(\tilde{\beta}) - \rho_0(\tilde{\beta}) \right| + C |\rho_0^n(\beta) - \rho_0(\beta)|$$

En intégrant puis avec un changement de variable (avec la proposition 4.3), on obtient :

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(\xi_2(\tilde{t}), 1)} \leq C \|\lambda_x - v_n\| + C_n |\tilde{t} - t| + C \|\rho_0^n - \rho_0\|_{L^p(0, 1)}$$

et on en déduit facilement que

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(\xi_2(\tilde{t}), 1)} \xrightarrow{|\tilde{t} - t| \rightarrow 0} 0 \quad (42)$$

Finalement, comme  $\rho \in L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$ ,

$$\int_{\xi_2(t)}^{\xi_2(\tilde{t})} |\rho(\tilde{t}, x) - \rho(t, x)|^p dx \leq (2 \|\rho\|_{\infty})^p |\xi_2(\tilde{t}) - \xi_2(t)|$$

Or

$$|\xi_2(\tilde{t}) - \xi_2(t)| = \left| \int_t^{\tilde{t}} \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_2(\theta)) d\theta \right| \leq |\tilde{t} - t| \|\lambda\|_{\infty}$$

Donc :

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(\xi_2(t), \xi_2(\tilde{t}))} \leq C |\tilde{t} - t|^{1/p} \xrightarrow{|\tilde{t} - t| \rightarrow 0} 0 \quad (43)$$

Finalement, avec (41), (42) et (43), on a bien :

$$\left\| \rho(\tilde{t}, \cdot) - \rho(t, \cdot) \right\|_{L^p(0, 1)} \xrightarrow{|\tilde{t} - t| \rightarrow 0} 0 \quad (44)$$

Montrons enfin que  $\rho$  vérifie la formulation faible.

Par définition, les  $(W_i)_{1 \leq i \leq N}$  vérifient l'égalité suivante  $\forall t \in [0, \delta]$  :

$$\begin{aligned} W_i(t) &= \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\ &\quad + \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx \end{aligned}$$



La proposition 4.4 donne donc directement :

$$W_i(t) = \int_0^{\xi_2(t)} \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy$$

$$+ \int_{\xi_2(t)}^1 \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \omega_i(y) dy$$

avec  $\alpha = \alpha(t, y)$ ,  $\beta = \beta(t, y)$ ,  $\xi_3(\theta) = \xi_3(\theta; t, y)$  et  $\xi_4(\theta) = \xi_4(\theta; t, y)$

Donc à partir de (13), on obtient directement que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall t \in [0, \delta]$  :

$$W_i(t) = \int_0^1 \rho(t, y) \omega_i(y) dy$$

Soit  $\tau \in [0, \delta]$ , et  $\varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\varphi(\tau, x) = 0 \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ . On définit :

$$A := \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\xi_2(t)} \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt$$

$$+ \int_0^\tau \int_{\xi_2(t)}^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt$$

On remplace  $\rho$  par la formule explicite donnée par (13) et on effectue les changements de variable  $u = \alpha_t(x)$  et  $x = \beta_t(y)$ . On obtient :

$$A = \int_0^\tau \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} [\partial_t \varphi + \lambda \partial_x \varphi - \mu \varphi](t, \xi_3(t; u, 0)) du dt$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} [\partial_t \varphi + \lambda \partial_x \varphi - \mu \varphi](t, \xi_4(t; 0, x)) dx dt$$

$$= \int_0^\tau \int_0^t r(u, (W_j(u))_j) \frac{d \left[ e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \varphi(t, \xi_3(t; u, 0)) \right]}{dt} du dt$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) \frac{d \left[ e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \varphi(t, \xi_4(t; 0, x)) \right]}{dt} dx dt$$

Pour pouvoir intégrer par rapport à la variable  $t$  en premier, on change l'ordre des intégrales

(Fubini) :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\tau r(u, (W_j(u))_j) \int_u^\tau \frac{d \left[ e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \varphi(t, \xi_3(t; u, 0)) \right]}{dt} dt du \\
&+ \left( \int_0^{f(\tau)} \int_0^\tau + \int_{f(\tau)}^1 \int_0^{f^{-1}(x)} \right) \rho_0(x) \frac{d \left[ e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \varphi(t, \xi_4(t; 0, x)) \right]}{dt} dt dx
\end{aligned}$$

où  $f(t) := \xi_1(0; t, 1) = 1 - \int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta$ . Or soit  $x \in [f(\tau), 1]$ , alors  $f^{-1}(x) = t$  où  $t$  est tel que  $x = \xi_1(0; t, 1)$ . Donc  $\xi_4(f^{-1}(x); 0, x) = \xi_4(t; 0, \xi_1(0; t, 1)) = 1$ .

De plus, on rappelle que  $\varphi(\tau, x) = 0 \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ . Donc finalement :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\tau r(u, (W_j(u))_j) \left[ e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \varphi(t, \xi_3(t; u, 0)) \right]_u^\tau du \\
&+ \int_0^{f(\tau)} \rho_0(x) \left[ e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \varphi(t, \xi_4(t; 0, x)) \right]_0^\tau dx \\
&+ \int_{f(\tau)}^1 \rho_0(x) \left[ e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \varphi(t, \xi_4(t; 0, x)) \right]_0^{f^{-1}(x)} dx \\
&= - \int_0^\tau r(u, (W_j(u))_j) \varphi(t, \xi_3(u; u, 0)) du - \int_0^{f(\tau)} \rho_0(x) \varphi(0, \xi_4(0; 0, x)) dx - \int_{f(\tau)}^1 \rho_0(x) \varphi(0, \xi_4(0; 0, x)) dx \\
&= - \int_0^\tau r(u, (W_j(u))_j) \varphi(t, 0) du - \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx
\end{aligned}$$

Et donc  $\rho$  est bien une solution faible de notre problème.  $\square$

## A.6 Preuve de la proposition 4.12

*Démonstration.* On considère d'abord le cas  $\tau > 0$ .

Pour tout  $\tau \in (0, T]$  et  $\varepsilon \in (0, \tau)$ , on choisit  $\eta_\varepsilon \in C^1([0, \tau])$  tel que  $\eta_\varepsilon(\tau) = 0$ ,  $\eta_\varepsilon(t) = 1$  pour tout  $t \in [0, \tau - \varepsilon]$  et  $\eta'_\varepsilon(t) \leq 0$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ .

Remarquons d'abord que pour tout  $h \in C^0([0, \tau])$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau - \varepsilon}^\tau \eta'_\varepsilon(t) h(t) dt = -h(\tau) \quad (\star)$$

En effet, le théorème de la moyenne donne  $\int_{\tau - \varepsilon}^\tau \eta'_\varepsilon(t) h(t) dt = \varepsilon \eta'_\varepsilon(c_\varepsilon) h(c_\varepsilon)$  où  $\tau - \varepsilon \leq c_\varepsilon \leq \tau$ .

D'autre part, un développement limité à l'ordre 1 de  $\eta_\varepsilon$  donne la relation  $\eta'_\varepsilon(\tau - \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon}$ , et

donc par continuité de  $\eta'$  et  $h$  on a  $\varepsilon\eta'_\varepsilon(c_\varepsilon)h(c_\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}h(\tau) = -h(\tau)$ .

Soit  $\varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\varphi(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ . On définit  $\varphi_\varepsilon(t, x) := \eta_\varepsilon(t)\varphi(t, x)$ . On a clairement  $\varphi_\varepsilon \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$ ,  $\varphi_\varepsilon(\tau, x) = 0 \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi_\varepsilon(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ . Soit  $\rho$  une solution faible, alors par définition on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi_\varepsilon(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi_\varepsilon(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi_\varepsilon(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\tau r(t, (W_j(t))_j) \varphi_\varepsilon(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_\varepsilon(0, x) dx = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\tau r(t, (W_j(t))_j) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx \\ & = \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \int_0^1 (1 - \eta_\varepsilon(t)) \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt \\ & + \int_{\tau-\varepsilon}^\tau (1 - \eta_\varepsilon(t)) r(t, (W_j(t))_j) \varphi(t, 0) dt - \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \int_0^1 \eta'_\varepsilon(t) \rho(t, x) \varphi(t, x) dx dt \end{aligned}$$

Il reste à faire tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Remarquons d'abord que les  $W_j$  sont continus sur  $[0, T]$ . En effet, soit  $t \in [0, T]$  et une suite  $t_n \rightarrow t$ , alors :

$$\begin{aligned} |W_j(t_n) - W_j(t)| &= \left| \int_0^1 \omega_j(y) \rho(t_n, y) dy - \int_0^1 \omega_j(y) \rho(t, y) dy \right| \\ &\leq \|\omega_j\|_\infty \int_0^1 |\rho(t_n, y) - \rho(t, y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } \rho \in C^0([0, T]; L^1(0, 1)) \end{aligned}$$

Donc par composition,  $(t, x) \mapsto \lambda((W_j(t))_j, x)$ ,  $(t, x) \mapsto \mu((W_j(t))_j, x)$  sont continues sur  $[0, T] \times [0, 1]$ .

On peut donc borner les termes suivants (on ne détaille pas ici mais on peut le voir facilement) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (1 - \eta_\varepsilon(t)) \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx \right| &\leq K_1 \\ |(1 - \eta_\varepsilon(t)) r(t, (W_j(t))_j) \varphi(t, 0)| &\leq K_2 \end{aligned}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes qui ne dépendent pas de  $t$ ,  $x$  et de  $\varepsilon$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \int_0^1 (1 - \eta_\varepsilon(t)) \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt \right| &\leq K_1 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ \left| \int_{\tau-\varepsilon}^\tau (1 - \eta_\varepsilon(t)) r(t, (W_j(t))_j) \varphi(t, 0) dt \right| &\leq K_2 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Enfin,  $t \mapsto \int_0^1 \rho(t, x) \varphi(t, x) dx \in C^0([0, \tau])$  donc (en appliquant  $\star$ ) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \eta'_\varepsilon(t) \int_0^1 \rho(t, x) \varphi(t, x) dx dt = - \int_0^1 \rho(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx$$

Ceci termine la preuve dans le cas  $\tau > 0$ .

À présent, on considère  $\tau = 0$ .

Soit  $\varphi \in C^1(\{0\} \times [0, 1])$  telle que  $\varphi(0, 1) = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\forall t \in [0, \varepsilon]$ , on pose  $\varphi_\varepsilon(t, x) = \varphi(0, x)$ . On a donc  $\varphi_\varepsilon \in C^1([0, \varepsilon] \times [0, 1])$  et  $\varphi_\varepsilon(t, 1) = \varphi(0, 1) = 0$ ,  $\forall t \in [0, \varepsilon]$ . Donc, d'après ce que l'on vient de montrer, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi_\varepsilon(t, x) + \lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi_\varepsilon(t, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi_\varepsilon(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\varepsilon r(t, (W_j(t))_j) \varphi_\varepsilon(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_\varepsilon(0, x) dx - \int_0^1 \rho(\varepsilon, x) \varphi_\varepsilon(\varepsilon, x) dx = 0 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\varphi_\varepsilon(t, x) = \varphi(0, x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\forall t \in [0, \varepsilon]$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \int_0^1 \rho(t, x) [\lambda((W_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(0, x) - \mu((W_j(t))_j, x) \varphi(0, x)] dx dt \\ & + \int_0^\varepsilon r(t, (W_j(t))_j) \varphi(0, 0) dt = \int_0^1 \rho(\varepsilon, x) \varphi(0, x) dx - \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned}$$

On fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Les termes de gauche tendent vers 0 (on peut borner les termes sous intégrale indépendamment de  $\varepsilon$ ).

D'autre part, comme  $\rho \in L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ , le théorème de convergence dominée donne :

$$\int_0^1 \rho(\varepsilon, x) \varphi(0, x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \rho(0, x) \varphi(0, x) dx$$

Donc finalement on obtient ce que l'on voulait, à savoir :

$$\int_0^1 \rho(0, x) \varphi(0, x) dx = \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx$$

□

## A.7 Preuve du théorème 4.3 d'unicité locale

La proposition suivante nous servira pour la preuve du théorème 4.3.

**Proposition A.1.** Soit  $f \in L^2(0, 1)$  tel que  $\forall \psi_0 \in C_c^1(0, 1)$ ,

$$\int_0^1 f \psi_0 = 0$$

Alors  $f = 0$  dans  $L^2(0, 1)$

*Démonstration.* Soit  $g \in L^2(0, 1)$ .  $C_c^1(0, 1)$  est dense dans  $L^2(0, 1)$ , donc il existe  $(g_n)_{n \geq 0} \in C_c^1(0, 1)^\mathbb{N}$  tel que  $\|g_n - g\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f g \right| &= \left| \int_0^1 f(g - g_n) + \int_0^1 f g_n \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|g - g_n\|_{L^2} + \left| \int_0^1 f g_n \right| \quad (\text{inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

Or par hypothèse, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\int_0^1 f g_n = 0$ , donc

$$\left| \int_0^1 f g \right| \leq \|f\|_{L^2} \|g - g_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $\int_0^1 f g = 0 \forall g \in L^2(0, 1)$  et donc  $f = 0$  dans  $L^2(0, 1)$ .  $\square$

. Preuve du théorème 4.3] Soit  $\bar{\rho} \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  une solution faible de notre problème, où  $\delta$  vérifie (36). D'après la proposition 4.12,  $\forall \tau \in [0, \delta]$  et  $\forall \varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\varphi(t, 1) = 0 \forall t \in [0, \tau]$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \bar{\rho}(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((\bar{W}_j(t))_j, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((\bar{W}_j(t))_j, x) \varphi(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\tau r(t, (\bar{W}_j(t))_j) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx - \int_0^1 \bar{\rho}(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{W}_i(t) := \int_0^1 \omega_i(y) \bar{\rho}(t, y) dy$$

Soit  $\psi_0 \in C_0^1(0, 1)$ . On pose  $\psi$  la solution du problème linéaire suivant (problème dual) :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \psi(t, x) + \lambda((\bar{W}_j(t))_j, x) \partial_x \psi(t, x) - \mu((\bar{W}_j(t))_j, x) \psi(t, x) = 0, & 0 \leq t \leq \tau, 0 \leq x \leq 1 \\ \psi(\tau, x) = \psi_0(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \psi(t, 1) = 0, & 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (45)$$

Soit  $\tau \in [0, \delta]$ , on définit les courbes caractéristiques suivantes :

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{ds}(s) = \lambda((\bar{W}_j(s))_j, \bar{\xi}_i(s)), \quad i \in \{1, \dots, 4\}$$

avec les conditions initiales :

- $\bar{\xi}_1(\tau) = 1$  pour un  $t$  donné
- $\bar{\xi}_2(0) = 0$
- $\bar{\xi}_3(\tau) = x$  pour  $t$  donné et  $x \in [0, \bar{\xi}_2(\tau)]$
- $\bar{\xi}_4(\tau) = x$  pour  $t$  donné et  $x \in [\bar{\xi}_2(\tau), 1]$

Notons que ces courbes caractéristiques sont bien définies car  $\bar{\rho} \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1))$  donc  $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{n_1}$  sont dans  $C^0([0, \delta])$ .

On définit  $\bar{\alpha} \in [0, \tau]$  et  $\bar{\beta} \in [0, \bar{\xi}_1(0; t, 1)]$  de manière analogue à  $\alpha$  et  $\beta$  (voir proposition 4.2).

On peut montrer (méthode des caractéristiques classique, similaire à la proposition 4.5) que  $\psi$  vérifie :

$$\begin{cases} \psi(t, x) = \psi_0(\bar{\xi}(\tau; t, x)) e^{-\int_t^\tau \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}(\theta; t, x)) d\theta} & 0 \leq x \leq \bar{\xi}_1(t), 0 \leq t \leq \tau \\ \psi(t, x) = 0, & \bar{\xi}_1(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (46)$$

De plus, on peut vérifier "facilement" que si  $\psi_0(1) = \psi'_0(1) = 0$ , alors les conditions de compatibilité sont respectées et on a  $\psi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$ .

En appliquant la proposition 4.12 en prenant  $\varphi = \psi$ , on a directement :

$$\int_0^1 \bar{\rho}(\tau, x) \psi_0(x) dx = \int_0^1 \rho_0(x) \psi(0, x) dx + \int_0^\tau r(t, (\bar{W}_j(t))_j) \psi(t, 0) dt$$

En remplaçant avec (46), on obtient :

$$\int_0^\tau r(t, (\bar{W}_j(t))_j) \psi(t, 0) dt = \int_0^\tau r(t, (\bar{W}_j(t))_j) \psi_0(\bar{\xi}_3(\tau; t, 0)) e^{-\int_t^\tau \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; t, 0)) d\theta} dt$$

On fait le changement de variable  $x = \bar{\xi}_3(\tau; t, 0)$  (équivalent à  $t = \bar{\alpha}(\tau, x)$ ).

On a donc (voir proposition 4.3) :

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^\tau \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta}$$

$\bar{\xi}_3(\tau, t = \tau, 0) = 0$  et  $\bar{\xi}_3(\tau, t = 0, 0) = \bar{\xi}_2(\tau)$ ,

Donc

$$\int_0^\tau r(t, (\bar{W}_j(t))_j) \psi(t, 0) dt = \int_0^{\bar{\xi}_2(\tau)} \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^\tau \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; \bar{\alpha}(\tau, x), 0)) d\theta} \psi_0(x) dx$$

et comme  $\bar{\xi}_3(\theta; \bar{\alpha}(\tau, x), 0) = \bar{\xi}_3(\theta; \bar{\alpha}(\tau, x), \bar{\xi}_3(\bar{\alpha}(\tau, x); \tau, x)) = \bar{\xi}_3(\theta; \tau, x)$ , on a finalement :

$$\int_0^\tau r(t) \psi(t, 0) dt = \int_0^{\bar{\xi}_2(\tau)} \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^\tau \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; \tau, x)) d\theta} \psi_0(x) dx$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \rho_0(x) \psi(0, x) dx = \int_0^{\bar{\xi}_1(0)} \rho_0(x) \psi_0(\bar{\xi}_4(\tau; 0, x)) e^{-\int_0^\tau \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; 0, x)) d\theta} dx + \int_{\bar{\xi}_1(0)}^1 0 dx$$

On fait le changement de variable  $y = \bar{\xi}_4(\tau; 0, x)$  (équivalent à  $\bar{\beta}(\tau, y) = x$ ) :

On a (voir la proposition 4.3) :

$$\frac{dx}{dy} = e^{-\int_0^\tau \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) d\theta}$$

$\bar{\xi}_4(\tau; 0, x = 0) = \bar{\xi}_2(\tau)$  et  $\bar{\xi}_4(\tau; 0, x = \bar{\xi}_1(0)) = 1$ ,

Donc

$$\int_0^1 \rho_0(x) \psi(0, x) dx = \int_{\bar{\xi}_2(\tau)}^1 \rho_0(\bar{\beta}(\tau, y)) e^{-\int_0^\tau \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; \tau, y)) d\theta} \psi_0(y) dy$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{\rho}(\tau, x) \psi_0(x) dx &= \int_0^{\bar{\xi}_2(\tau)} \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}(\theta; \tau, x)) d\theta} \psi_0(x) dx \\ &+ \int_{\bar{\xi}_2(\tau)}^1 \rho_0(\bar{\beta}(\tau, x)) e^{-\int_0^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; \tau, x)) d\theta} \psi_0(x) dx \end{aligned}$$

En résumé,  $\forall \tau \in [0, \delta]$ ,

$$\int_0^1 [\bar{\rho}(\tau, x) - g(\tau, x)] \psi_0(x) dx = 0$$

en posant

$$\begin{aligned} g(\tau, x) &:= \mathbb{1}_{[0, \bar{\xi}_2(\tau)]}(x) \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}(\theta; \tau, x)) d\theta} \\ &+ \mathbb{1}_{[\bar{\xi}_2(\tau), 1]}(x) \rho_0(\bar{\beta}(\tau, x)) e^{-\int_0^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; \tau, x)) d\theta} \end{aligned}$$

Or ceci est valable pour n'importe quel  $\psi_0 \in \{C^1[0, 1]; \psi_0(1) = \psi_0'(1) = 0\} \subset C_c^1(0, 1)$ , donc d'après la proposition A.1,  $\bar{\rho}(\tau, \cdot) = g(\tau, \cdot)$  dans  $L^2(0, 1)$  pour tout  $\tau \in [0, \delta]$ .

Soit  $\tau \in [0; \delta]$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\bar{\rho}(\tau, \cdot) - g(\tau, \cdot)\|_{L^1(0,1)} \leq \|\bar{\rho}(\tau, \cdot) - g(\tau, \cdot)\|_{L^2(0,1)} = 0$$

Donc on a directement que :

$$\|\bar{\rho} - g\|_{C^0([0, \delta], L^1(0,1))} = \sup_{\tau \in [0, \delta]} \|\bar{\rho}(\tau, \cdot) - g(\tau, \cdot)\|_{L^1(0,1)} = 0$$

Comme  $\bar{\rho} \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1))$ , il vient que  $g \in C^0([0, \delta]; L^1(0, 1))$  et  $\bar{\rho} = g$  dans  $C^0([0, \delta]; L^1(0, 1))$ . De plus, on peut en déduire que  $\bar{\rho}(\tau, x) = g(\tau, x)$  pour presque tout  $(\tau, x) \in [0, \delta] \times [0, 1]$  et donc  $\bar{\rho} = g$  dans  $L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$ . Finalement, on a dans  $C^0([0, \delta]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta) \times (0, 1))$  que :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(\tau, x) = \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} & 0 \leq x \leq \bar{\xi}_2(t), 0 \leq \tau \leq \delta \\ \bar{\rho}(\tau, x) = \rho_0(\bar{\beta}) e^{-\int_0^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) d\theta}, & \bar{\xi}_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \delta \end{cases} \quad (47)$$

Et donc en utilisant la proposition 4.4, on trouve que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , et  $\forall t \in [0, \delta]$  on a :

$$\begin{aligned} \bar{W}_i(t) &= \int_0^t r(u, (\bar{W}_j(u))_j) e^{-\int_u^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\bar{\xi}_3(t; u, 0)) du \\ &+ \int_0^{1 - \int_0^t \lambda((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\bar{\xi}_4(t; 0, x)) dx \\ &= F_i(\bar{W}_i)(t) \end{aligned}$$

Montrons que  $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$ .

Pour  $i = j_0$ , on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |\bar{W}_{j_0}(t)| &\leq \|\omega_{j_0}\|_\infty \int_0^t r_0(u) + r_1(u) \bar{W}_{j_0}(u) du + \|\rho_0\|_\infty \|\omega_{j_0}\|_\infty \\ &\leq \|\omega_{j_0}\|_\infty \left( T \|r_0\|_{\infty, [0, T]} + \|\rho_0\|_\infty \right) + \|\omega_{j_0}\|_\infty \|r_1\|_{\infty, [0, T]} \int_0^t \bar{W}_{j_0}(u) du \end{aligned}$$

et donc d'après le lemme de Grönwall version intégrale et la définition de  $M_{j_0}$  (voir (7)) :

$$\begin{aligned} |\bar{W}_{j_0}(t)| &\leq \|\omega_{j_0}\|_\infty (T \|r_0\|_\infty + \|\rho_0\|_\infty) e^{\|\omega_{j_0}\|_\infty \|r_1\|_\infty t} \\ &\leq \|\omega_{j_0}\|_\infty (T \|r_0\|_\infty + \|\rho_0\|_\infty) e^{\|\omega_{j_0}\|_\infty \|r_1\|_\infty T} \leq M_{j_0} \end{aligned}$$

donc en passant au sup :

$$\|\bar{W}_{j_0}\|_\infty \leq M_{j_0}$$

Pour  $i \neq j_0$ , on fait la même majoration que dans la preuve de la proposition 4.8 :

$$\|\bar{W}_i\| \leq T \|\omega_i\| (\|r_0\| + \|r_1\| M_{j_0}) + \|\omega_i\| \|\rho_0\| = M_i$$

Finalement, on a bien montré que  $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_N) \in \prod_{j=1}^N \Omega_{\delta, M_j}$ . Or  $F$  admet un unique point fixe sur cet espace (proposition 4.10), donc par unicité  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\bar{W}_i \equiv W_i$ . Par conséquent,  $\bar{\xi}_i \equiv \xi_i$ ,  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$ ,  $\bar{\beta} \equiv \beta$ . En remplaçant dans (47), on a directement que  $\bar{\rho} \equiv \rho$ .  $\square$

## A.8 Preuve du théorème 4.1 d'existence-unicité d'une solution globale

*Démonstration.* On va procéder en itérant sur l'intervalle temporel de définition de la solution. On a vu qu'on a existence et unicité d'une solution sur  $[0, \delta_0] \times [0, 1]$  avec  $\delta_0$  qui vérifie (36). En itérant, on veut montrer qu'on a existence et unicité sur  $[0, \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_m] \times [0, 1]$  avec  $\sum_{i=0}^m \delta_i = T$ . Il faudra donc s'assurer qu'il existe bien un  $m$  tel que  $\sum_{i=0}^m \delta_i$  atteigne  $T$ .

On procède donc par récurrence.

Soit  $n \geq 0$ , on suppose qu'on a une solution faible jusqu'au temps  $\tau := \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n \in (0, T)$  donnée par :

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta}, & \xi_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau \\ \rho(t, x) = \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_\alpha^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} & \text{sinon} \end{cases} \quad (48)$$

Pour  $n = 0$ , l'existence-unicité d'une telle solution est donnée par les théorèmes 4.2 et 4.3.



On considère  $\tilde{\rho}_c \in C^0([0, \delta_{n+1}]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \delta_{n+1}) \times (0, 1))$  (avec  $\delta_{n+1}$  suffisamment petit) la solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\rho}_c(t, x) = -\partial_x \left( \lambda \left( (\tilde{W}_{c,i}(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x \right) \tilde{\rho}_c(t, x) \right) - \mu \left( (\tilde{W}_{c,i}(t))_{n_1+1 \leq i \leq n_1+n_2}, x \right) \tilde{\rho}_c(t, x), \\ x \in (0, 1), t \geq 0 \\ \tilde{\rho}_c(t=0, x) = \rho(\tau, x), \quad x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda \left( (\tilde{W}_{c,i}(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x \right) \tilde{\rho}_c(t, x) = r \left( t + \tau, (\tilde{W}_{c,i}(t))_{n_1+n_2 < i \leq N} \right), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\tilde{W}_{c,i}(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \tilde{\rho}_c(t, y) dy$ .

Notons que cette solution est bien définie car  $\rho(\tau, \cdot) \in L^\infty(0, 1)$  et  $r(\cdot + \tau, (\cdot)_j) \in C^1([0; +\infty) \times ([0; +\infty))^{n_3})$  vérifie bien l'hypothèse de sous-linéarité. On peut donc appliquer les théorèmes 4.2 et 4.3 d'existence de solution locale (sous réserve que  $\delta_{n+1}$  soit assez petit bien entendu).

On définit  $\tilde{\rho}(t + \tau, \cdot) := \tilde{\rho}_c(t, \cdot)$ ,  $\forall t \in [0, \delta_{n+1}]$ , et  $\bar{\rho}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(t, \cdot) = \rho(t, \cdot), \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \bar{\rho}(t, \cdot) = \tilde{\rho}(t, \cdot) = \tilde{\rho}_c(t - \tau, \cdot), \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \end{array} \right. \quad (50)$$

Montrons que  $\bar{\rho}$  est une solution faible sur  $[0, \tau + \delta_{n+1}] \times [0, 1]$ .

Premièrement, montrons que  $\bar{\rho} \in C^0([0, \tau + \delta_{n+1}]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \tau + \delta_{n+1}) \times (0, 1))$ . Comme  $\rho \in C^0([0, \tau]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \tau) \times (0, 1))$  et  $\tilde{\rho} \in C^0([\tau, \tau + \delta_{n+1}]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((\tau, \tau + \delta_{n+1}) \times (0, 1))$ , il suffit de montrer la continuité en  $\tau$ .

Or  $\tilde{\rho}_c$  est une solution faible de (49) donc (en appliquant la proposition 4.12 à  $\tilde{\rho}_c$  en prenant  $\tau = 0$  dans l'énoncé de la proposition)  $\tilde{\rho}(\tau, x) = \rho(\tau, x)$  p.p.  $x \in [0, 1]$ , d'où la continuité en  $\tau$ .

À présent, montrons que  $\bar{\rho}$  vérifie la formulation variationnelle, i.e.  $\forall u \in [0, \tau + \delta_{n+1}]$  et  $\forall \varphi \in C^1([0, u] \times [0, 1])$  tel que

$\varphi(u, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, u]$ , on a :

$$\begin{aligned} \star &:= \int_0^u \int_0^1 \bar{\rho}(t, x) \left[ \partial_t \varphi(t, x) + \lambda((\bar{W}_i(t))_i, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((\bar{W}_i(t))_i, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ &+ \int_0^u r(t, (\bar{W}_i(t))_i) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx = 0 \end{aligned}$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\bar{W}_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \bar{\rho}(t, y) dy$

Si  $u \in [0, \tau]$ , comme  $\rho$  est une solution faible sur  $[0, \tau]$ , on a directement l'égalité voulue.

Si  $u \in (\tau, \tau + \delta_{n+1}]$ , on a :

$$\begin{aligned} \star &= \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) \left[ \partial_t \varphi(t, x) + \lambda(W_i(t)_i, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_i(t))_i, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ &+ \int_\tau^u \int_0^1 \tilde{\rho}(t, x) \left[ \partial_t \varphi(t, x) + \lambda(\tilde{W}_i(t)_i, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((\tilde{W}_i(t))_i, x) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ &+ \int_0^\tau r(t, (W_i(t))_i) \varphi(t, 0) dt + \int_\tau^u r(t, (\tilde{W}_i(t))_i) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned}$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\tilde{W}_i(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \tilde{\rho}(t, y) dy$ .

Or d'après la proposition 4.12, comme  $\rho$  est solution faible sur  $[0, \tau]$  on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \rho(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda(W_i(t))_{i, x} \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_i(t))_{i, x}) \varphi(t, x)] dx dt \\ & + \int_0^\tau r(t, (W_i(t))_{i, x}) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx = \int_0^1 \rho(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \end{aligned} \quad (51)$$

De plus,  $\tilde{\rho}_c$  est une solution faible de (49) sur  $[0, \delta_{n+1}] \times [0, 1]$  et  $\forall t \in [0, \delta_{n+1}]$ ,  $\tilde{\rho}(t + \tau, \cdot) := \tilde{\rho}_c(t, \cdot)$ , donc  $\forall \psi \in C^0([0, u - \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\psi(u - \tau, \cdot) = 0$  et  $\psi(\cdot, 1) = 0$  :

$$\begin{aligned} & \int_\tau^{u-\tau} \int_0^1 \tilde{\rho}(t + \tau, x) \left[ \partial_t \psi(t, x) + \lambda(\tilde{W}_i(t + \tau))_{i, x} \partial_x \psi(t, x) - \mu((\tilde{W}_i(t + \tau))_{i, x}) \psi(t, x) \right] dx dt \\ & + \int_0^{\tau-u} r(t + \tau, (\tilde{W}_i(t + \tau))_{i, x}) \psi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho(\tau, x) \psi(0, x) dx = 0 \end{aligned}$$

En particulier, cette égalité est vraie pour  $\psi(t, x) = \varphi(t + \tau, x)$ .

En faisant le changement de variable affine  $t = t + \tau$ , on a directement :

$$\begin{aligned} & \int_\tau^u \int_0^1 \tilde{\rho}(t, x) \left[ \partial_t \varphi(t, x) + \lambda(\tilde{W}_i(t))_{i, x} \partial_x \varphi(t, x) - \mu((\tilde{W}_i(t))_{i, x}) \varphi(t, x) \right] dx dt \\ & + \int_\tau^u r(t, (\tilde{W}_i(t))_{i, x}) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

En additionnant (51) et (52), on obtient finalement que

$$\star = \int_0^1 \rho(\tau, x) \psi(0, x) dx - \int_0^1 \rho(\tau, x) \psi(0, x) dx = 0$$

Donc  $\bar{\rho} \in C^0([0, \tau + \delta_{n+1}]; L^1(0, 1)) \cap L^\infty((0, \tau + \delta_{n+1}) \times (0, 1))$  vérifie la formulation variationnelle, c'est bien une solution faible sur  $[0, \tau + \delta_{n+1}] \times [0, 1]$ .

Pour la suite, on définit les courbes caractéristiques  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\xi}_c$ ,  $\bar{\xi}$  à partir respectivement des  $(\tilde{W}_i)_i$ ,  $(\tilde{W}_{c,i})_i$ ,  $(\tilde{W}_i)_i$  similairement à la manière dont l'on avait défini les courbes  $\xi$  (définition 4.2). À partir de ces courbes, on définit  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha}_c$ ,  $\tilde{\beta}_c$  de la même façon que l'on avait défini  $\alpha$  et  $\beta$  (proposition 4.2, remarque 4.1).

Pour commencer, montrons quelques propriétés sur ces courbes, illustrée par la figure 24. Soit  $(t, x) \in [0, \delta_{n+1}] \times [0, 1]$ . Soit  $s \in [0, \delta_{n+1}]$  (tel que  $\tilde{\xi}_c(s; t, x)$  bien définie), alors

$$\tilde{\xi}_c^t(s; t, x) = \lambda((\tilde{W}_{c,j}(s))_j, \tilde{\xi}_c(s)) = \lambda((\tilde{W}_j(s + \tau))_j, \tilde{\xi}_c(s)) \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_c(t) = x$$

Or, on a aussi

$$\tilde{\xi}(s + \tau) = \lambda((\tilde{W}_j(s + \tau))_j, \tilde{\xi}(s + \tau)) \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}(t + \tau) = x$$

$\tilde{\xi}(\cdot + \tau; t + \tau, x)$  et  $\tilde{\xi}_c(\cdot; t, x)$  vérifient le même problème de Cauchy, donc par unicité

$$\tilde{\xi}(\cdot + \tau; t + \tau, x) = \tilde{\xi}_c(\cdot; t, x), \quad \forall t \in [0, \delta_{n+1}], x \in [0, 1] \quad (53)$$

et comme  $\bar{\rho}(t, \cdot) = \tilde{\rho}(t, \cdot)$  sur  $[\tau, \tau + \delta_{n+1}]$ , on a  $\bar{W} \equiv \tilde{W}$  sur  $[\tau, \tau + \delta_{n+1}]$ , et donc

$$\bar{\xi}(\cdot + \tau; t + \tau, x) = \tilde{\xi}(\cdot + \tau; t + \tau, x) = \tilde{\xi}_c(\cdot; t, x), \quad \forall t \in [0, \delta_{n+1}], x \in [0, 1] \quad (54)$$

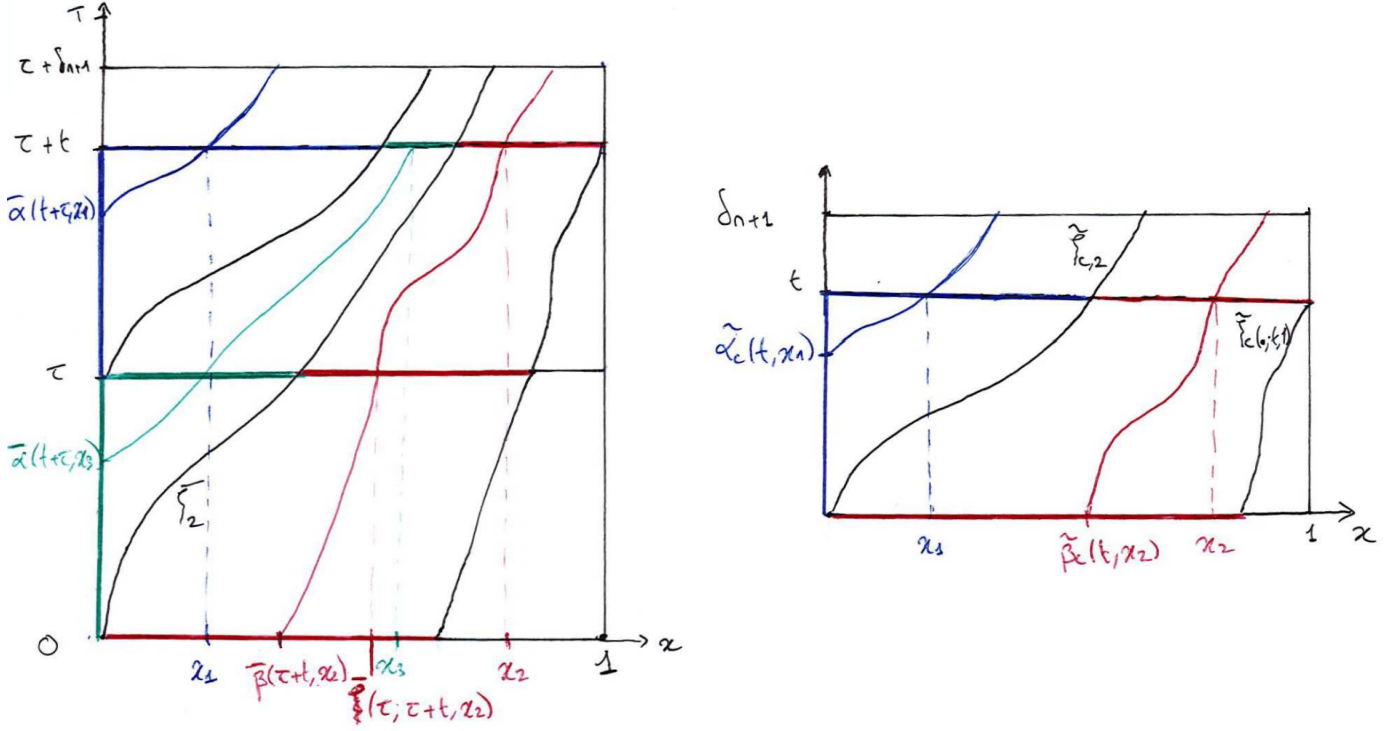


FIGURE 24 : Cas  $\bar{\xi}_2$  défini sur  $[0, t_{max}]$  avec  $\tau + \delta_{n+1} \leq t_{max}$ . Les intervalles de même couleur (bleu, vert ou rouge) sont en bijection.

Donc, en particulier, soit  $(t, x) \in [0, \delta_{n+1}] \times [0, 1]$  tel que  $\tilde{\alpha}_c(t, x)$  bien défini (i.e.  $x \in [0, \tilde{\xi}_{c,2}(t)]$ ), alors on a :

$$0 = \tilde{\xi}_c(\tilde{\alpha}_c(t, x); t, x) = \bar{\xi}(\tilde{\alpha}_c(t, x) + \tau; t + \tau, x) \quad \text{et} \quad \bar{\xi}(\bar{\alpha}(t + \tau, x); t + \tau, x) = 0$$

Donc :

$$\bar{\alpha}(t + \tau, x) = \tilde{\alpha}_c(t, x) + \tau \quad (55)$$

De plus, soit  $(t, x) \in [\tau, \tau + \delta_{n+1}] \times [0, 1]$  tel que  $\tilde{\beta}_c(t - \tau, x)$  bien défini (i.e.  $x \in [\tilde{\xi}_{c,2}(t - \tau), 1]$ ), alors :

$$\tilde{\beta}_c(t - \tau, x) = \tilde{\xi}_c(0; t - \tau, x) = \tilde{\xi}(\tau; t, x) = \bar{\xi}(\tau; t, x) \quad (56)$$

Ces propriétés vont nous être utiles pour montrer la chose suivante :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(t, x) = \rho_0(\bar{\beta}) e^{-\int_0^t \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) d\theta}, & \bar{\xi}_2(t) \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \\ \bar{\rho}(t, x) = \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^t \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} & \text{sinon} \end{cases} \quad (57)$$

Par définition de  $\bar{\rho}$  et comme par hypothèse de récurrence,  $\rho$  vérifie (48), (57) est vérifié pour  $0 \leq t \leq \tau$ . Il reste à le montrer pour  $\tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1}$ .

$\bar{\rho}(t, \cdot) = \tilde{\rho}_c(t - \tau, \cdot)$  sur  $[\tau, \tau + \delta_{n+1}]$  donc avec (54) et le théorème 4.2 appliqué à  $\tilde{\rho}_c$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(t, x) = \frac{r(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x), (\tilde{W}_j(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)))_j)}{\lambda((\tilde{W}_j(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)))_j, 0)} e^{-\int_{\tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)}^{t - \tau} \lambda_x((\tilde{W}_j(\theta + \tau))_j, \tilde{\xi}_3(\theta + \tau)) + \mu((\tilde{W}_j(\theta + \tau))_j, \tilde{\xi}_3(\theta + \tau)) d\theta} \\ \text{pour } 0 \leq x \leq \bar{\xi}(t; \tau, 0) \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \\ \bar{\rho}(t, x) = \rho(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) e^{-\int_0^{t - \tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta + \tau))_j, \bar{\xi}(\theta + \tau)) + \mu((\bar{W}_j(\theta + \tau))_j, \bar{\xi}(\theta + \tau)) d\theta} \\ \text{pour } \bar{\xi}(t; \tau, 0) \leq x \leq 1 \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \end{array} \right. \quad (58)$$

Or d'une part, avec (55) et (56) et en faisant un changement de variable affine dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{r(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x), (\tilde{W}_j(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)))_j)}{\lambda((\tilde{W}_j(\tau + \tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)))_j, 0)} e^{-\int_{\tilde{\alpha}_c(t - \tau, x)}^{t - \tau} \lambda_x((\tilde{W}_j(\theta + \tau))_j, \tilde{\xi}_3(\theta + \tau)) + \mu((\tilde{W}_j(\theta + \tau))_j, \tilde{\xi}_3(\theta + \tau)) d\theta} \\ &= \frac{r(\bar{\alpha}(t, x), (\bar{W}_j(\bar{\alpha}(t, x)))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}(t, x)))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}(t, x)}^t \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} \end{aligned}$$

et d'autre part, par hypothèse de récurrence sur  $\rho$  et comme  $\bar{\rho}(\tau, \cdot) = \rho(\tau, \cdot)$ , si  $\bar{\xi}_2(\tau)$  est défini on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} \\ 0 \leq \bar{\xi}(\tau; t, x) \leq \bar{\xi}_2(\tau) \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \\ \bar{\rho}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \rho_0(\bar{\beta}) e^{-\int_0^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) d\theta} \\ \bar{\xi}_2(\tau) \leq \bar{\xi}(\tau; t, x) \leq 1 \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \end{array} \right. \quad (59)$$

avec  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x))$ ,  $\bar{\xi}(\theta) = \bar{\xi}(\theta; \tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \bar{\xi}(\theta; t, x)$  et  $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x))$ , Dans le cas contraire, si  $\bar{\xi}_2(\tau)$  n'est pas défini, on a simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} \\ 0 \leq \bar{\xi}(\tau; t, x) \leq 1 \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \end{array} \right.$$

On se place dans le cas  $\bar{\xi}_2(\tau)$  bien défini pour la suite (comme sur la figure 24). Dans l'autre cas (voir figure 25), le principe de la preuve est le même.

Soit  $t$  tel que  $\bar{\xi}_2$  bien défini :

$$\bar{\xi}(\tau; t, x) \leq \bar{\xi}_2(\tau) \Leftrightarrow \bar{\xi}(t; \tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) \leq \bar{\xi}(t; \tau, \bar{\xi}_2(\tau)) \Leftrightarrow x \leq \bar{\xi}_2(t)$$

car  $\bar{\xi}(t; \tau, \cdot)$  est strictement croissante (et donc  $\bar{\xi}(\tau; t, \cdot)$  aussi).

En effet, soient  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 < x_2$ , et supposons que  $\bar{\xi}(t; \tau, x_1) \geq \bar{\xi}(t; \tau, x_2)$ .

On a  $\bar{\xi}(t; \tau, x_1) \geq \bar{\xi}(t; \tau, x_2)$  et  $\bar{\xi}(\tau; \tau, x_1) < \bar{\xi}(\tau; \tau, x_2)$ , donc par continuité de  $\bar{\xi}(\cdot; \tau, x_1) - \bar{\xi}(\cdot; \tau, x_2)$ , il existe  $s \in [\tau, t]$  tel que  $x_0 := \bar{\xi}(s; \tau, x_1) = \bar{\xi}(s; \tau, x_2)$ , et donc par unicité de l'EDO, les deux caractéristiques sont confondues et donc  $x_1 = x_2$ , ce qui est absurde. Donc  $\bar{\xi}(t; \tau, x_1) < \bar{\xi}(t; \tau, x_2)$ , et  $\bar{\xi}(t; \tau, \cdot)$  est strictement croissante.

De plus,  $0 = \bar{\xi}(\bar{\alpha}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)); \tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \bar{\xi}(\bar{\alpha}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)); t, x)$  donc par unicité :

$$\bar{\alpha}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \bar{\alpha}(t, x)$$

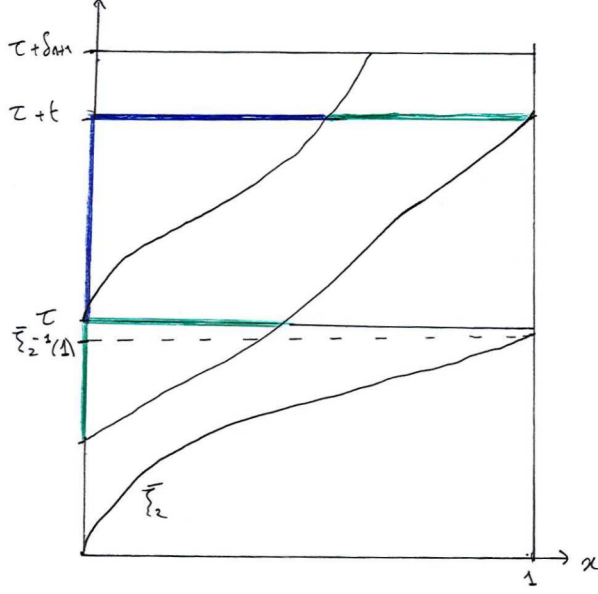


FIGURE 25 : Cas  $\bar{\xi}_2^{-1}(1) < \tau$ . Les intervalles de même couleur sont en bijection.

et on aussi

$$\bar{\beta}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \bar{\xi}(0; t, x) = \bar{\beta}(t, x)$$

Donc finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \frac{r(\bar{\alpha}, (\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j)}{\lambda((\bar{W}_j(\bar{\alpha}))_j, 0)} e^{-\int_{\bar{\alpha}}^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_3(\theta)) d\theta} , \\ \text{pour } \bar{\xi}(t; \tau, 0) \leq x \leq \bar{\xi}_2(t) \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \text{ si } \bar{\xi}_2(t) \text{ bien défini,} \\ \text{ou pour } \bar{\xi}(t; \tau, 0) \leq x \leq 1 \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \text{ sinon} \\ \bar{\rho}(\tau, \bar{\xi}(\tau; t, x)) = \rho_0(\bar{\beta}) e^{-\int_0^{\tau} \lambda_x((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) + \mu((\bar{W}_j(\theta))_j, \bar{\xi}_4(\theta)) d\theta} , \\ \text{pour } \bar{\xi}_2(t) \leq x \leq 1 \quad , \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta_{n+1} \text{ si } \bar{\xi}_2(t) \text{ bien défini} \end{array} \right. \quad (60)$$

avec  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t, x)$ ,  $\bar{\xi}(\theta) = \bar{\xi}(\theta; t, x)$  et  $\bar{\beta} = \bar{\beta}(t, x)$ .

En remplaçant dans (58), on obtient ce que l'on voulait montrer, à savoir (57).

On a donc montré par récurrence l'existence d'une solution globale  $\rho$  qui vérifie (10) sur tout intervalle de temps  $[0, \sum_{i=0}^m \delta_i]$  avec  $m \in \mathbf{N}$  (et  $\sum_{i=0}^m \delta_i \leq T$ ). Pour avoir existence de la solution sur  $[0, T]$ , il faut donc s'assurer que la somme des  $\delta_i$  peut atteindre  $T$ .

Soit  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $\tau = \delta_0 + \dots + \delta_n$ . On va montrer que  $\delta_{n+1}$  est minoré par une constante qui ne dépend pas de  $\tau$  (i.e. de  $n$ ).

Soit  $t \in [0, \tau]$  et  $j \in \{0, \dots, N\}$ . Soit  $\rho$  la solution globale définie sur  $[0, \tau] \times [0, 1]$ . En utilisant la formule explicite de  $\rho$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_j(t) = \int_0^{\bar{\xi}_2(t)} \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_{\alpha}^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_j(y) dy \\ \quad + \int_{\bar{\xi}_2(t)}^1 \rho_0(\beta) e^{-\int_0^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta)) d\theta} \omega_j(y) dy, \quad \text{si } t \leq \bar{\xi}_2^{-1}(1) \\ W_j(t) = \int_0^1 \frac{r(\alpha, (W_j(\alpha))_j)}{\lambda((W_j(\alpha))_j, 0)} e^{-\int_{\alpha}^t \lambda_x((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) + \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta)) d\theta} \omega_j(y) dy, \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

Et en effectuant les changements de variable  $u = \alpha_t(y)$  et  $x = \beta_t(y)$  (voir proposition 4.3), on obtient :

$$\begin{cases} W_j(t) = \int_0^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du \\ \quad + \int_0^{1-\int_0^t \lambda((W_j(\theta))_j, \xi_1(\theta)) d\theta} \rho_0(x) e^{-\int_0^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_4(\theta; 0, x)) d\theta} \omega_i(\xi_4(t; 0, x)) dx, \quad \text{si } t \leq \xi_2^{-1}(1) \\ W_j(t) = \int_{\xi_1^{-1}(0)}^t r(u, (W_i(u))_i) e^{-\int_u^t \mu((W_j(\theta))_j, \xi_3(\theta; u, 0)) d\theta} \omega_i(\xi_3(t; u, 0)) du, \quad \text{si } \xi_2^{-1}(1) \leq t \leq T \end{cases}$$

On peut alors montrer, avec un raisonnement complètement similaire à celui fait à la fin de la preuve du théorème d'unicité locale 4.3 (en utilisant notamment le lemme de Grönwall), que  $\forall j \in \{0, \dots, N\}$

$$0 \leq \|W_j\|_{\infty, [0, \tau]} \leq M_j$$

Soit  $t \in [0, \tau]$ , on peut donc déduire de la formule explicite de  $\rho$  que :

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \leq e^{T \|\lambda_x\|_{\infty, [0, M_1] \times \dots \times [0, M_{n_1}] \times [0, 1]}} \max \left( \|\rho_0\|_{\infty, [0, 1]}, \frac{\|r\|_{\infty, [0, T] \times \prod_j [0, M_j]}}{\inf_{[0, M_1] \times \dots \times [0, M_{n_1}] \times [0, 1]} \lambda} \right) \quad (61)$$

et cette majoration est en particulier vraie pour  $t = \tau$ .

Or,  $\delta_{n+1}$  vérifie l'équivalent de (36) pour le problème (49). On peut réécrire (36) de manière plus simple comme :

$$\delta_{n+1} = \min \left( c_0, \frac{1}{c_1 \|\rho(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} + c_2}, \frac{1}{c_3 \|\rho(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} + c_4} \right)$$

où  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  sont des constantes qui ne dépendent pas de  $\tau$  (i.e. ne dépendent pas de  $n$ ). (61) donne une majoration de  $\|\rho(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)}$  par une constante indépendante de  $\tau$ , donc finalement on peut majorer  $\delta_{n+1}$  par une constante indépendante de  $\tau$  (et strictement positive).

En choisissant  $m$  assez grand,  $\sum_{i=0}^m \delta_i$  peut donc atteindre  $T$ .

On a donc montré l'existence d'une solution globale  $\rho$  définie sur  $[0, T] \times [0, 1]$ , et qui vérifie (10).

Montrons à présent l'unicité de la solution globale. Supposons qu'on ait deux solutions globales  $\rho^1$  et  $\rho^2$  définies sur  $[0, T] \times [0, 1]$  et montrons que  $\rho^1 \equiv \rho^2$ .

Le théorème 4.3 donne  $\rho^1 \equiv \rho^2$  sur  $[0, \delta_0] \times [0, 1]$ .

Soit  $t \geq \delta_0$ , on définit  $\rho_c^1(t - \delta_0, \cdot) := \rho^1(t, \cdot)$  et  $\rho_c^2(t - \delta_0, \cdot) := \rho^2(t, \cdot)$ .

Montrons que pour  $k \in \{1, 2\}$ ,  $\rho_c^k$  est solution faible sur  $[0, \delta^1] \times [0, 1]$  du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_c^k(t, x) = -\partial_x (\lambda((W_{c,i}^k(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) \rho_c(t, x)) - \mu((W_{c,i}^k(t))_{n_1+1 \leq i \leq n_1+n_2}, x) \rho_c^k(t, x), \\ x \in (0, 1), \quad 0 \leq t \leq \delta_1 \\ \rho_c^k(t = 0, x) = \rho^k(\delta_0, x), \quad x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \lambda(W_{c,i}^k(t))_{1 \leq i \leq n_1}, x) \rho_c^k(t, x) = r(t + \delta_0, (W_{c,i}^k(t))_{n_1+n_2 < i \leq N}), \quad 0 \leq t \leq \delta_1 \end{cases} \quad (62)$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $W_{c,i}^k(t) = \int_0^1 \omega_i(y) \rho_c^k(t, y) dy = \int_0^1 \omega_i(y) \rho^k(t + \delta_0, y) dy = W_i^k(t + \delta_0)$

Soit  $\tau \in [0, \delta_1]$  et soit  $\varphi \in C^1([0, \tau] \times [0, 1])$  tel que  $\varphi(\tau, x) = 0, \forall x \in [0, 1]$  et  $\varphi(t, 1) = 0, \forall t \in [0, \tau]$ . On veut montrer que :

$$\begin{aligned} \star &:= \int_0^\tau \int_0^1 \rho_c^k(t, x) [\partial_t \varphi(t, x) + \lambda((W_{c,i}^k(t))_i, x) \partial_x \varphi(t, x) - \mu((W_{c,i}^k(t))_i, x) \varphi(t, x)] dx dt \\ &+ \int_0^\tau r(t + \delta_0, (W_{c,i}^k(t))_i) \varphi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho^k(\delta_0, x) \varphi(0, x) dx = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

En utilisant la définition de  $\rho_c^k$  et avec un changement de variable affine, on a directement :

$$\begin{aligned} \star &= \int_{\delta_0}^{\delta_0+\tau} \int_0^1 \rho^k(t, x) [\partial_t \varphi(t - \delta_0, x) + \lambda((W_i^k(t))_i, x) \partial_x \varphi(t - \delta_0, x) - \mu((W_i^k(t))_i, x) \varphi(t - \delta_0, x)] dx dt \\ &+ \int_{\delta_0}^{\tau+\delta_0} r(t, (W_i^k(t))_i) \varphi(t - \delta_0, 0) dt + \int_0^1 \rho^k(\delta_0, x) \varphi(0, x) dx \end{aligned} \quad (64)$$

On définit  $\psi \in C^1([\delta_0 + \tau] \times [0, 1])$  une fonction telle que :

- pour tout  $t \in [\delta_0, \delta_0 + \tau]$ ,  $\psi(t, \cdot) = \varphi(t - \delta_0, \cdot)$ .
- pour  $t \in [0, \delta_0]$ ,  $\psi(t, 1) = 0$ .

Notons qu'une telle fonction existe car  $\varphi(0, 1) = 0$  (par définition de  $\varphi$ ).

En remplaçant dans (64), on a :

$$\begin{aligned} \star &= \int_{\delta_0}^{\delta_0+\tau} \int_0^1 \rho^k(t, x) [\partial_t \psi(t, x) + \lambda((W_i^k(t))_i, x) \partial_x \psi(t, x) - \mu((W_i^k(t))_i, x) \psi(t, x)] dx dt \\ &+ \int_{\delta_0}^{\tau+\delta_0} r(t, (W_i^k(t))_i) \psi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho^k(\delta_0, x) \psi(\delta_0, x) dx \end{aligned} \quad (65)$$

$\rho^k$  est une solution faible globale du problème (4), donc en appliquant la proposition 4.12 à  $\rho^k$  avec  $\tau = \delta_0$ , on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^k(\delta_0, x) \psi(\delta_0, x) dx &= \int_0^{\delta_0} \int_0^1 \rho^k(t, x) [\partial_t \psi(t, x) + \lambda((W_i^k(t))_i, x) \partial_x \psi(t, x) - \mu((W_i^k(t))_i, x) \psi(t, x)] dx dt \\ &+ \int_0^{\delta_0} r(t, (W_i^k(t))_i) \psi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned} \quad (66)$$

(65) et (66) donnent :

$$\begin{aligned} \star &= \int_0^{\delta_0+\tau} \int_0^1 \rho^k(t, x) [\partial_t \psi(t, x) + \lambda((W_i^k(t))_i, x) \partial_x \psi(t, x) - \mu((W_i^k(t))_i, x) \psi(t, x)] dx dt \\ &+ \int_0^{\delta_0+\tau} r(t, (W_i^k(t))_i) \psi(t, 0) dt + \int_0^1 \rho_0^k(x) \psi(0, x) dx \end{aligned} \quad (67)$$

Et en appliquant directement la définition 4.1 de solution faible, (67) donne directement  $\star = 0$ .

On a donc montré que pour  $k \in \{1, 2\}$ ,  $\rho_c^k$  est solution faible de (62).

Or,  $\rho^1(\delta_0, \cdot) = \rho^2(\delta_0, \cdot)$  donc  $\rho_c^1$  et  $\rho_c^2$  sont en fait solutions du même problème. D'après le théorème 4.3 d'unicité locale on a donc  $\rho_c^1 \equiv \rho_c^2$  sur  $[0, \delta_1] \times [0, 1]$ . Or par définition, pour  $k = 1, 2$ ,  $\rho_c^k(\cdot - \delta_0, \cdot) = \rho^k(\cdot, \cdot)$  sur  $[\delta_0, \delta_0 + \delta_1] \times [0, 1]$ , donc finalement  $\rho^1 \equiv \rho^2$  sur  $[0, \delta_0 + \delta_1] \times [0, 1]$ . En itérant ce raisonnement, on a

$$\rho^1 \equiv \rho^2 \quad \text{sur } [0, \delta_0 + \dots + \delta_m] = [0, T]$$

d'où l'unicité de la solution globale. □

## Références

- [1] Guillaume BALLIF, Frédérique CLÉMENT et Romain YVINEC. “Averaging of a Stochastic Slow-Fast Model for Population Dynamics : Application to the Development of Ovarian Follicles”. en. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 82.1 (fév. 2022), p. 359-380. ISSN : 0036-1399, 1095-712X. DOI : [10.1137/21M1409615](https://doi.org/10.1137/21M1409615).
- [2] Guillaume BALLIF, Frédérique CLÉMENT et Romain YVINEC. “Nonlinear compartmental modeling to monitor ovarian follicle population dynamics on the whole lifespan”. Juill. 2022.
- [3] Celine BONNET et al. “Multiscale population dynamics in reproductive biology : singular perturbation reduction in deterministic and stochastic models”. en. In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 67 (2020). Sous la dir. de Vincent CALVEZ et al., p. 72-99. ISSN : 2267-3059. DOI : [10.1051/proc/202067006](https://doi.org/10.1051/proc/202067006).
- [4] J. C. MARIANA et C. MILLIER. “Application de quelques modèles de dynamique des populations à l’étude de la folliculogenèse ovarienne”. In : *Annales de biologie animale, biochimie, biophysique* 17.2 (1977), p. 193-206.
- [5] Frédérique CLÉMENT et Danielle MONNIAUX. “Mathematical modeling of ovarian follicle development : A population dynamics viewpoint”. en. In : *Current Opinion in Endocrine and Metabolic Research* 18 (juin 2021), p. 54-61. ISSN : 2451-9650. DOI : [10.1016/j.coemr.2021.02.003](https://doi.org/10.1016/j.coemr.2021.02.003).
- [6] Jean-Michel CORON et al. “Analysis of a conservation law modeling a highly re-entrant manufacturing system”. en. In : *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B* 14.4 (2010), p. 1337-1359. ISSN : 1553-524X. DOI : [10.3934/dcdsb.2010.14.1337](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.1337).
- [7] Daniel DESSOUTER. *Modélisation et estimation de paramètres pour comprendre l’ovogenèse chez les poissons, rapport de stage de Master 1*. fr. Rapp. tech. 2021.
- [8] Francial Giscard Baudin Libengué Dobélé-Kpoka Libengue DOBELE-KPOKA. “Méthode non-paramétrique des noyaux associés mixtes et applications”. fr. Thèse de doct. Université de Franche-Comté ; Université Ouaga 1 Professeur Joseph Ki-Zerbo (Ouagadougou, Burkina Faso), juin 2013.
- [9] M. J. FADDY. “A Note on the General Time-Dependent Stochastic Compartmental Model”. In : *Biometrics* 32.2 (1976). Publisher : [Wiley, International Biometric Society], p. 443-448. ISSN : 0006-341X. DOI : [10.2307/2529513](https://doi.org/10.2307/2529513).
- [10] M. J. FADDY, Esther C. JONES et R. G. EDWARDS. “An analytical model for ovarian follicle dynamics”. en. In : *Journal of Experimental Zoology* 197.2 (1976). \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/jez.1401970203>, p. 173-185. ISSN : 1097-010X. DOI : [10.1002/jez.1401970203](https://doi.org/10.1002/jez.1401970203).
- [11] Louis FOSTIER. *Modélisation de l’ovogenèse de poisson, rapport de préparation au stage de Master 2*. fr. Rapp. tech. 2022.
- [12] Kostas GANIAS, Susan K. LOWERRE-BARBIERI et Wade COOPER. “Understanding the determinate-indeterminate fecundity dichotomy in fish populations using a temperature dependent oocyte growth model”. en. In : (nov. 2014). DOI : [10.1016/j.seares.2014.10.018](https://doi.org/10.1016/j.seares.2014.10.018).
- [13] Marie HAGHEBAERT. *Modélisation et estimation de paramètres pour comprendre l’ovogenèse chez le poisson, rapport de stage de Master*. fr. Rapp. tech. 2019.



- [14] Karl R. HANSEN et al. “A new model of reproductive aging : the decline in ovarian non-growing follicle number from birth to menopause”. In : *Human Reproduction* 23.3 (mars 2008), p. 699-708. ISSN : 0268-1161. DOI : [10.1093/humrep/dem408](https://doi.org/10.1093/humrep/dem408).
- [15] Takashi IWAMATSU et al. “Oogenesis in the Medaka *Oryzias latipes* : Stages of Oocyte Development : Developmental Biology”. In : *Zoological science* 5 (1988), p. 353-373. ISSN : 0289-0003.
- [16] B. L. KEYFITZ et N. KEYFITZ. “The McKendrick partial differential equation and its uses in epidemiology and population study”. en. In : *Mathematical and Computer Modelling* 26.6 (sept. 1997), p. 1-9. ISSN : 0895-7177. DOI : [10.1016/S0895-7177\(97\)00165-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00165-9).
- [17] Daisuke KOBAYASHI et al. “Steroidogenesis in the Ovarian Follicles of the Medaka (*Oryzias latipes*) during Vitellogenesis and Oocyte Maturation”. en. In : *Zoological Science* 13.6 (déc. 1996), p. 921-927. ISSN : 0289-0003. DOI : [10.2108/zsj.13.921](https://doi.org/10.2108/zsj.13.921).
- [18] Manon LESAGE et al. “C-ECi : a CUBIC-ECi combined clearing method for three-dimensional follicular content analysis in the fish ovary†”. en. In : *Biology of Reproduction* 103.5 (oct. 2020), p. 1099-1109. ISSN : 0006-3363, 1529-7268. DOI : [10.1093/biolre/ioaa142](https://doi.org/10.1093/biolre/ioaa142).
- [19] Daqian LI et Wen-ci YU. *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems*. English. OCLC : 13200500. Durham, NC, U.S.A. : Mathematics Dept., Duke University, 1985.
- [20] Zhenhong LI et al. “A computational model for asynchronous oocyte growth dynamics in a batch-spawning fish”. In : *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences* 68.9 (sept. 2011). Publisher : NRC Research Press, p. 1528-1538. ISSN : 0706-652X. DOI : [10.1139/f2011-066](https://doi.org/10.1139/f2011-066).
- [21] Esther LUBZENS et al. “Oogenesis in teleosts : How fish eggs are formed”. In : *General and Comparative Endocrinology* 165.3 (2010). Publisher : Elsevier, p. 367-389. DOI : [10.1016/j.ygcen.2009.05.022](https://doi.org/10.1016/j.ygcen.2009.05.022).
- [22] Norikazu MUROZUMI et al. “Loss of Follicle-Stimulating Hormone Receptor Function Causes Masculinization and Suppression of Ovarian Development in Genetically Female Medaka”. en. In : *Endocrinology* 155.8 (août 2014), p. 3136-3145. ISSN : 0013-7227, 1945-7170. DOI : [10.1210/en.2013-2060](https://doi.org/10.1210/en.2013-2060).
- [23] Masatoshi NAKAMOTO et al. “Ovarian aromatase loss-of-function mutant medaka undergo ovary degeneration and partial female-to-male sex reversal after puberty”. en. In : *Molecular and Cellular Endocrinology* 460 (jan. 2018), p. 104-122. ISSN : 03037207. DOI : [10.1016/j.mce.2017.07.013](https://doi.org/10.1016/j.mce.2017.07.013).
- [24] Jean-Claude PHILIPPART et Patrick KESTEMONT. “Considérations sur la croissance oocytaire chez les poissons à ovogenèse synchrone et asynchrone”. fr. In : (1991), p. 12.
- [25] Adriana RODRÍGUEZ-MARÍ et al. “Characterization and expression pattern of zebrafish Anti-Müllerian hormone (Amh) relative to sox9a, sox9b, and cyp19a1a, during gonad development”. eng. In : *Gene expression patterns : GEP* 5.5 (juin 2005), p. 655-667. ISSN : 1567-133X. DOI : [10.1016/j.modgep.2005.02.008](https://doi.org/10.1016/j.modgep.2005.02.008).
- [26] Eugene F. SCHUSTER. “Incorporating support constraints into nonparametric estimators of densities”. en. In : *Communications in Statistics - Theory and Methods* 14.5 (jan. 1985), p. 1123-1136. ISSN : 0361-0926, 1532-415X. DOI : [10.1080/03610928508828965](https://doi.org/10.1080/03610928508828965).

- [27] Kelly SELMAN et al. “Stages of oocyte development in the zebrafish, *Brachydanio rerio*”. en. In : *Journal of Morphology* 218.2 (nov. 1993), p. 203-224. ISSN : 0362-2525, 1097-4687. DOI : [10.1002/jmor.1052180209](https://doi.org/10.1002/jmor.1052180209).
- [28] Balasubramanian SENTHILKUMARAN, Michiyasu YOSHIKUNI et Yoshitaka NAGAHAMA. “A shift in steroidogenesis occurring in ovarian follicles prior to oocyte maturation”. en. In : *Molecular and Cellular Endocrinology* 215.1-2 (fév. 2004), p. 11-18. ISSN : 03037207. DOI : [10.1016/j.mce.2003.11.012](https://doi.org/10.1016/j.mce.2003.11.012).
- [29] Peipei SHANG et Zhiqiang WANG. “Analysis and control of a scalar conservation law modeling a highly re-entrant manufacturing system”. en. In : *Journal of Differential Equations* 250.2 (jan. 2011), p. 949-982. ISSN : 0022-0396. DOI : [10.1016/j.jde.2010.09.003](https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.09.003).
- [30] B. W. SILVERMAN. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London : Chapman & Hall, 1986.
- [31] Zhiwei ZHANG, Bo ZHU et Wei GE. “Genetic Analysis of Zebrafish Gonadotropin (FSH and LH) Functions by TALEN-Mediated Gene Disruption”. en. In : *Molecular Endocrinology* 29.1 (jan. 2015), p. 76-98. ISSN : 0888-8809, 1944-9917. DOI : [10.1210/me.2014-1256](https://doi.org/10.1210/me.2014-1256).
- [32] Zhiwei ZHANG et al. “Anti-Müllerian hormone (Amh/amh) plays dual roles in maintaining gonadal homeostasis and gametogenesis in zebrafish”. en. In : *Molecular and Cellular Endocrinology* 517 (nov. 2020), p. 110963. ISSN : 03037207. DOI : [10.1016/j.mce.2020.110963](https://doi.org/10.1016/j.mce.2020.110963).
- [33] Zhiwei ZHANG et al. “Disruption of Zebrafish Follicle-Stimulating Hormone Receptor (fshr) But Not Luteinizing Hormone Receptor (lhcg) Gene by TALEN Leads to Failed Follicle Activation in Females Followed by Sexual Reversal to Males”. en. In : *Endocrinology* 156.10 (oct. 2015), p. 3747-3762. ISSN : 0013-7227, 1945-7170. DOI : [10.1210/en.2015-1039](https://doi.org/10.1210/en.2015-1039).
- [34] Lin-Yan ZHOU et al. “Characterization, expression and transcriptional regulation of P450c17-I and -II in the medaka, *Oryzias latipes*”. en. In : *Biochemical and Biophysical Research Communications* 362.3 (oct. 2007), p. 619-625. ISSN : 0006291X. DOI : [10.1016/j.bbrc.2007.08.044](https://doi.org/10.1016/j.bbrc.2007.08.044).